ГЛАВА 12

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ

1.12. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПРИМЫКАЮЩИЕ ВОПРОСЫ

Пусть E – сепарабельное бесконечномерное банахово пространство; $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ – цепочка конечномерных подпространств такая, что $\dim E_n = n$ и $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ плотно в E. Для каждого $x, x \in E$, определим последовательность "уклонений" от подпространств E_n:

$$d(x,n) = \inf\{\|x-y\| : y \in E_n\}, \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

С.Н.Бернштейн [1] (см. также [2]) доказал, что какова бы ни была числовая последовательность $\{d_n\}_{n\geq 0}$, $d_n \downarrow 0$, найдется элемент x, $x \in E$, такой, что

$$d(x,n) = d_n, \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Таково (положительное) решение обратной задачи наилучшего приближения в случае сепарабельного пространства и конечномерных приближающих подпространств. Строго говоря, С.Н.Бернштейн рассматривал случай $E = C[a,b]$, E_n – подпространство алгебраических полиномов степени $\leq n-1$; однако, его решение воспроизводится без изменений в общем случае.

Пусть теперь $B(\mathbb{R})$ – банахово пространство всех ограниченных равномерно непрерывных функций, определенных на оси, с обычной нормой; B_σ – его замкнутое подпространство, образованное целыми функциями (точнее, их сужениями на ось) экспоненциального типа $\leq \sigma$. Как показал С.Н.Бернштейн [3], многие факты теории наилучшего приближения непрерывных функций многочленами переносятся на случай приближения функций из $B(\mathbb{R})$ функциями из B_σ $(0 \leq \sigma < \infty)$.

Определим уклонения функции f от B_σ:

$$A(f,\sigma) = \inf\{\|f-g\| : g \in B_\sigma\}.$$

При фиксированном f функция $A(f,\sigma)$ удовлетворяет следующим условиям: 1. $A(f,\rho) \geq A(f,\sigma)$ при $\rho < \sigma$. 2. $A(f,\sigma) = A(f,\sigma+0)$. 3. $\lim_{\sigma\to\infty} A(f,\sigma) = 0$.

ЗАДАЧА I. Пусть ограниченная функция $\sigma \mapsto F(\sigma)$ $(0 \leqslant \sigma < \infty)$ удовлетворяет условиям I-3. Найдется ли функция f, $f \in B(\mathbb{R})$, для которой $A(f,\sigma) \equiv F(\sigma)$?

ЗАДАЧА 2. Если замкнуть в равномерной метрике объединение всех подпространств B_ρ $(\rho < \sigma)$, то получим собственное подпространство $B_{\sigma-0} \subset B_\sigma$. Какова его коразмерность в B_σ ?

ЗАДАЧА 3. Пусть f - почти периодическая по Бору функция. Будет ли уклонение $A(f,\sigma)$ функцией чистых скачков?

ЗАДАЧА 4. Пусть $A(f,\sigma)$ - функция чистых скачков. Будет ли f почти периодической?

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С.Н. Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций. - В кн.: Собр.соч.,т.2, М., Изд-во АН СССР, 1954, 292-294.
2. Натансон И.П. Конструктивная теория функций, М.-Л., ГИТТЛ, 1949.
3. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени.- В кн.: Собр.соч., т.2, М., Изд-во АН СССР, 1954, 371-395.

М.И.КАДЕЦ

СССР, 310000, Харьков,
Харьковский институт инженеров коммунального строительства