9

(К)

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

Том 122, № 1

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 122, № 1

МАТЕМАТИКА

М. И. КАДЕЦ

О СЛАБОЙ И СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 V 1958)

Известно следующее предложение, связывающее понятия слабой и сильной сходимости:

Теорема 1. *Если последовательность x_n элементов равномерно выпуклого пространства слабо сходится к элементу x и* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$, *то последовательность x_n сходится к x сильно* (1).

Эта теорема была перенесена Выборным (2) на локально равномерно выпуклые пространства (3).

В настоящей заметке будет доказана:

Теорема 2. *В любом сепарабельном пространстве Банаха можно ввести новую норму, эквивалентную прежней, такую, что для любых элементов x_n и x из*

$$x_n \xrightarrow[\text{сл}]{} x, \quad \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\| \tag{1}$$

следует

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0. \tag{2}$$

Мы докажем эту теорему для пространства C непрерывных функций, определенных на $[0, 1]$, а затем воспользуемся универсальностью C в классе сепарабельных банаховых пространств.

На множестве непрерывных на $[0,1]$ функций определим норму

$$\|f(t)\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f, \frac{1}{k}\right), \tag{3}$$

где $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f(t)$:

$$\omega(f, \delta) = \max_{|t'-t''|\leqslant\delta}|f(t') - f(t'')|.$$

Так как $\omega(f, \delta) \leqslant 2\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f|$, то норма (3) эквивалентна норме пространства C:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)| \leqslant \|f(t)\| \leqslant 3\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|.$$

Пространство непрерывных функций с нормой (3) будем обозначать C^*. Докажем некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Если последовательность $\varphi_n(t)$ сходится к нулю в каждой точке отрезка $[0, 1]$ и $\|\varphi_n\| = 1$, то для любого $\delta > 0$*

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega(\varphi_n, \delta) \geqslant {}^1/_3. \tag{4}$$

Возьмем n_0 настолько большим, чтобы для всех $n > n_0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ неравенство $|\varphi_n(t)| < \varepsilon$ выполнялось на множестве E, мера которого больше $1-\delta$. Если $\varphi_n(t'_n)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_n(t)|$, $t''_n\in E$ и $|t'_n-t''_n|<\delta$, то

$$|\varphi_n(t'_n)-\varphi_n(t''_n)|>\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_n(t)|-\varepsilon,$$

откуда следует (4).

Лемма 2. *Если последовательность $\varphi_n(t)$ сходится к нулю в каждой точке отрезка* $[0, 1]$, *то*

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega(f+\varphi_n,\delta)\geqslant\omega(f,\delta) \tag{5}$$

для любой непрерывной функции $f(t)$ и $\delta>0$.

Пусть $|t'-t''|\leqslant\delta$ и $|f(t')-f(t'')|=\omega(f,\delta)$. Возьмем n_0 настолько большим, чтобы для всех $n>n_0$ и произвольного $\varepsilon>0$ выполнялись неравенства $|\varphi_n(t')|<\varepsilon/2$ и $|\varphi_n(t'')|<\varepsilon/2$; тогда

$$|f(t')+\varphi_n(t')-f(t'')-\varphi_n(t'')|\geqslant|f(t')-f(t'')|-\varepsilon,$$

откуда следует (5).

Пусть теперь $\varphi_n\in C^*$ — слабо сходящаяся к нулю последовательность такая, что $\|\varphi_n\|>3\varepsilon>0$, а f — произвольный элемент из C^*. Определим индекс $q=q(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)<\frac{\varepsilon}{8}\quad\text{при } k>q. \tag{6}$$

Выберем n так, чтобы удовлетворить условиям

$$\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(\varphi_n,\frac{1}{k}\right)>\frac{\varepsilon}{2^{q+1}}, \tag{7}$$

что можно сделать на основании (4), и

$$\omega\left(f+\varphi_n,\frac{1}{k}\right)>\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon}{2^{q+3}}\quad\text{при } k\leqslant q. \tag{8}$$

Сумму из (3) разобьем на две:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f+\varphi_n,\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}\omega\left(f+\varphi_n,\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f+\varphi_n,\frac{1}{k}\right).$$

Оценим снизу каждую из полученных сумм

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}\omega\left(f+\varphi_n,\frac{1}{k}\right)>\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}\left[\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon}{2^{q+3}}\right]>\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon}{2^{q+3}}>$$

$$>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{2^{q+3}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon}{2^{q+2}}; \tag{9}$$

в этой оценке мы воспользуемся неравенствами (8) и (6).

Вторую сумму оценим с помощью неравенств (7) и (6):

$$\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f+\varphi_n,\frac{1}{k}\right)\geqslant\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(\varphi_n,\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)>$$

$$>\frac{\varepsilon}{2^{q+1}}-\frac{\varepsilon}{2^{q+3}}=\frac{3\varepsilon}{2^{q+3}}. \tag{10}$$

Сложив (9) и (10), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f+\varphi_n,\frac{1}{k}\right)>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)+\frac{\varepsilon}{2^{q+3}}.$$

Так как, кроме того,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f+\varphi_n| \geqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f|,$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|f+\varphi_n\| > \|f\|,$$

откуда следует справедливость теоремы 2.

В дальнейшем мы будем рассматривать пространства, удовлетворяющие условиям (1), (2) и, кроме того, строго нормированные. Такую нормировку можно получить, изменив (3) следующим образом:

$$\|f\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)| + \left[\int_0^1 f^2(t)\,dt\right]^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,\omega\left(f, \frac{1}{k}\right). \quad (3a)$$

Применим теорему 2 к доказательству следующего предложения.

Теорема 3. *Сепарабельные рефлективные пространства Банаха топологически эквивалентны.*

Пусть X — сепарабельное рефлективное пространство, удовлетворяющее (1), (2) и строго нормированное. Рассмотрим систему линейных подпространств $P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ таких, что $\operatorname{def} P_n = n$, а пересечение всех P_n содержит только нуль пространства; такая система существует во всяком сепарабельном банаховом пространстве. Для каждого элемента $x \in X$ введем последовательность уклонений $H_n(x)$:

$$H_n(x) = \min_{y\in P_n} \|x-y\| = \|x - x^{(n)}\| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Существование и единственность элемента наилучшего приближения $x^{(n)}$ обеспечиваются соответственно рефлективностью и строгой нормированностью пространства X. Для любого n, очевидно,

$$H_n(x) \leqslant H_{n+1}(x) \leqslant \|x\|.$$

Воспользуемся тем, что каждое P_n разбивает P_{n-1} на три части

$$P_{n-1} = P_{n-1}^{+} + P_n + P_{n-1}^{-},$$

и построим последовательность функционалов $\varepsilon_n(x)$:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_n(x) = +1, & \text{если } x^{(n-1)} \in P_{n-1}^{+}; & \\ \varepsilon_n(x) = \varepsilon_{n-1}(x), & \text{если } x^{(n-1)} \in P_n & (\text{т. е. } H_{n-1}(x) = H_n(x)); \\ \varepsilon_n(x) = -1, & \text{если } x^{(n-1)} \in P_{n-1}^{-}. & \end{array}$$

Кроме того будем считать $\varepsilon_0(x) = 0$ для любого x.

Лемма 3. *Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям*

$$|h_j| \leqslant |h_{j+1}|; \qquad \text{если } |h_j| = |h_{j+1}|, \text{ то } h_j = h_{j+1}. \quad (11)$$

Множество Q_n элементов x таких, что

$$\varepsilon_k(x)\, H_k(x) = h_k \quad (k \leqslant n), \quad (12)$$

непусто и получается из P_n, если к каждому $y \in P_n$ прибавить один и тот же элемент x^*, удовлетворяющий (12).

Доказательство этой леммы приведено в ([4]).

Лемма 4. *Какова бы ни была ограниченная последовательность действительных чисел $h_1, h_2, h_3, \ldots$, удовлетворяющая* (11), *существует единственный элемент x, для которого*

$$\varepsilon_n(x)\, H_n(x) = h_n \quad (n = 1, 2, \ldots); \quad (13)$$

при этом $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} H_n(x)$.

Множество элементов, удовлетворяющих (13), есть пересечение $\prod\limits_1^{\infty} Q^n$ множеств, удовлетворяющих (12). Достаточно, следовательно, показать, что это пересечение содержит в точности одну точку. Допустим, что $\prod_1^\infty Q_n$ содержит элемент x, тогда, согласно лемме 4, каждое $Q_n = x + P_n$, и вся совокупность $\{Q_n\}_1^\infty$ оказывается конгруэнтной $\{P_n\}_1^\infty$. Так как $\prod_1^\infty P_n$, по определению, содержит единственный элемент, то и $\prod_1^\infty Q_n$ содержит единственный элемент. Остается показать, что $\prod_1^\infty Q_n$ непусто. Рассмотрим пересечения множеств Q_n и шара S с произвольным радиусом $h > \lim_{n\to\infty} |h_n|$. Полученные непустые выпуклые замкнутые множества образуют убывающую последовательность. По теореме В. Л. Шмульяна ([5]) пересечение этих множеств непусто. Таким образом, существование и единственность элемента x доказаны. Так как h может быть взято сколь угодно близким к $\lim_{n\to\infty} |h_n|$, то одновременно доказано равенство $\|x\| = \lim_{n\to\infty} H_n(x)$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3, заметим, что если последовательность x_n слабо сходится к x, то элемент x_n с ростом n неограниченно приближается к каждому Q_k, содержащему x, и поэтому

$$\begin{aligned} &H_k(x) = \lim_{n\to\infty} H_n(x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots); \\ &\varepsilon_k(x) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_k(x_n), \qquad \text{если } H_{k-1}(x) < H_k(x); \\ &\varepsilon_k(x) = \varepsilon_{k-1}(x), \qquad \text{если } H_{k-1}(x) = H_k(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть теперь X и Y — сепарабельные рефлективные пространства, удовлетворяющие (1), (2) и строго нормированные; пусть для каждого из них определены уклонения $H_k(x)$ и $H_k(y)$ и функционалы $\varepsilon_k(x)$ и $\varepsilon_k(y)$. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие элемент $y \in Y$ так, чтобы

$$\varepsilon_k(x) H_k(x) = \varepsilon_k(y) H_k(y) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Это соответствие взаимно-однозначное. Покажем его непрерывность. Пусть x_n и x — произвольные элементы из X и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x. \tag{16}$$

Так как Y рефлективно, то соответствующая последовательность y_n слабо компактна. Согласно (14) никакая ее подпоследовательность не может слабо сходиться к элементу, отличному от элемента y, соответствующего x, и поэтому

$$y_n \xrightarrow[\text{сл}]{} y. \tag{17}$$

Согласно лемме 4 $\|x_n\| = \|y_n\|$; $\|x\| = \|y\|$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} \|y_k\| = \|y\|. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Точно так же доказывается непрерывность обратного соответствия. Таким образом, пространства X и Y гомеоморфны, что и доказывает теорему 3.

Харьковский автомобильно-дорожный
институт

Поступило
4 IV 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Шмульян, ДАН, 24, № 7, 647 (1939). [2] R. Výborný, Časop. Pest. Mat., 81, № 3, 352 (1956). [3] A. R. Lovaglia, Trans. Am. Math. Soc., 78, № 1, 225 (1955). [4] М. И. Кадец, Усп. матем. наук, 10, № 4, 137 (1955). [5] В. Л. Шмульян, Матем. сборн., 5 (47), № 2, 317 (1939).