О линейной размерности пространства $L_p (p > 2)$

М. И. Кадец

Если пространство Банаха X изоморфно какому-нибудь замкнутому линейному подпространству другого пространства Банаха X_1, то говорят, что линейная размерность X не превосходит линейной размерности X_1:

$$\dim_l X \leqslant \dim_l X_1. \tag{1}$$

Если одновременно выполняется соотношение

$$\dim_l X_1 \leqslant \dim_l X, \tag{2}$$

то пространства X и X_1 имеют одинаковую линейную размерность

$$\dim_l X = \dim_l X_1.$$

При этом, вообще говоря, они могут не быть изоморфными. Если выполняется только соотношение (1), а (2) не выполняется, то говорят, что линейная размерность X ниже линейной размерности X_1:

$$\dim_l X < \dim_l X_1.$$

Если не выполняется ни (1), ни (2), то линейные размерности пространств X и X_1 не сравнимы.

Как показал Paley [1], неравенство

$$\dim_l L_p > \dim_l l_q, \tag{3}$$

в случае $p > 2$, выполняется только при условии $q = p$ или $q = 2$. ~~Цель настоящей заметки — развитие приведенного результата Paley.~~

Определим для каждого $\delta > 0$ множество $M_p^{\delta} \subset L_p$ следующим образом: $x(t)$ из L_p принадлежит M_δ, если

$$\operatorname{mes} E\{\,|x(t)| \geqslant \delta \|x\|\,\} \geqslant \delta. \tag{4}$$

Очевидно, $M_p^{\delta_1} \subset M_p^{\delta_2}$ при $\delta_1 > \delta_2$ и $\sum M_p^{\delta} = L_p$.

ТЕОРЕМА 1. Если бесконечномерное подпространство пространства L_p* принадлежит какому-нибудь M_p^{δ}, то оно изоморфно l_2. Если X не содержится ни в каком M_p^{δ}, то

* Всюду в этой заметке мы считаем $p > 2$.

$$\dim_l X \geqslant \dim_l l_p.$$

Доказательство. Пусть $X \subset M_p^{\delta}$ и $f(x) \in X$. Оценим норму $f(x)$ в метрике пространства L_2. Из (4) следует, что

$$\sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt} \geqslant \delta^{\frac{3}{2}} \|x\|_{L_p}.$$

Так как для любой функции из L_p $\| f \|_{L_2} \leqslant \| f \|_{L_p}$, то для $x(t) \in X$

$$\delta^{\frac{3}{2}} \|x\|_{L_p} \leqslant \|x\|_{L_2} \leqslant \|x\|_{L_p}, \tag{5}$$

и таким образом пространство X оказывается изоморфным подпространству L_2, составленному из тех же функций. Так как каждое бесконечномерное подпространство L_2 изоморфно l_2, то X изоморфно l_2. Пусть теперь X не содержится ни в каком M_p^{δ}. Введем в рассмотрение числовую последовательность

$$\eta_k = 2^{-1-(k+1)p} - 2^{-1-(k+2)p} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и проведем следующий индуктивный процесс. Положим $\delta_1 = \eta_1$ и выберем из X нормированный элемент $f_1(x)$, не принадлежащий M_{δ_1}. Согласно (4) существует множество $E_1 \subset [0, 1]$ такое, что

$$\operatorname{mes} E_1 = \delta_1; \int_{E_1} | f_1(t)|^p\,dt \geqslant 1 - \delta_1$$

После того, как уже определены $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{n-1}$, определим

$$\delta_n = \min\left\{\frac{1}{4}\delta_{n-1};\ \eta_n;\ \varepsilon_n\right\},$$

где ε_n удовлетворяет условиям:

$$\sup_{\operatorname{mes} E = \varepsilon_n} \int_E |x_k(t)|^p\,dt < \delta_{n-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и выберем из X нормированный элемент $x_n(t) \overline{\in} M_{\delta_n}$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательности $\{\delta_n\}_1^{\infty}$; $\{x_n(t)\}_1^{\infty}$, $\{E_n\}_1^{\infty}$, удовлетворяющие условиям:

$$\delta_n \leqslant \frac{1}{4}\delta_{n-1};\ \operatorname{mes} E_n = \delta_n;\ \int_{E_n} | f_n|^p\,dx > 1 - \delta_n;$$

$$\int_{E_{n+j}} | f_n |^p\,dx < \delta_{n+j-1} \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$J_n = E_n \Big/ \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Множества J_n попарно не пересекаются и, как следует из процесса их построения,

$$\int\limits_{J_n} | f_n(t) |^p dt > 1-2^{-(n+1)p} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Положим $x_n(t)=y_n(t)+z_n(t)$, где

$$y_n(t)=\begin{cases} x_n(t) & \text{при } t\in J_n \\ 0 & \text{при } t\overline{\in} J_n \end{cases} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Тогда

$$\Big\| \sum_1^n a_k y_k \Big\| - \Big\| \sum_1^n a_k z_k \Big\| \leqslant \Big\| \sum_1^n a_k x_k \Big\| \leqslant \Big\| \sum_1^n a_k y_k \Big\| + \Big\| \sum_1^n a_k z_k \Big\|$$

для любых коэффициентов a_k. Из (6) и (7) следует, что

$$\sqrt[p]{(1-2^{-2p})\sum_1^n |a_k|^p} \leqslant \Big\| \sum_1^n a_k y_k \Big\| = \sqrt[p]{\sum_1^n \|a_k y_k\|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_1^n |a_k|^p}\,.$$

Согласно (6).

$$\Big\| \sum_1^n a_k z_k \Big\| \leqslant \sum_1^n \|a_k z_k\| \leqslant \sum_1^n \frac{|a_k|}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2} \max_k |a_k| \leqslant \frac{1}{2} \sqrt[p]{\sum_1^n |a_k|^p}\,.$$

Таким образом

$$\left(\sqrt[p]{1-2^{-2p}} - \frac{1}{2}\right) \sqrt[p]{\sum_1^n |a_k|^p} \leqslant \Big\| \sum_1^n a_k x_k \Big\| \leqslant \frac{3}{2} \sqrt[p]{\sum_1^n |a_k|^p}\,,$$

и пространство, натянутое элементами $x_n(t)$, оказывается изоморфным l_p, что и доказывает вторую часть теоремы. Очевидно, эта часть теоремы справедлива и при $p < 2$.

Из доказанной теоремы легко следуют такие необходимые и достаточные условия изоморфизма подпространства $X\subset L_p$ пространству l_2.

Следствие 1. Бесконечномерное подпространство X пространства L_p изоморфно l_2 в том и только том случае, если X остается полным в метрике L_2.

Следствие 2. Бесконечномерное подпространство X пространс L_p изоморфно l_2 в том и только том случае, если $X\subset M_p^{\varepsilon}$ для какого-нибудь $\delta > 0$.

Как показал С. Банах [2], пространства $l_p (p \geqslant 1)$ и C обладают следующим интересным свойством. Если для какого-то пространства X

$$\dim_l X < \dim_l C \text{ или } \dim_l X < \dim_l l_p,$$

то X—конечномерно. Естественно ввести следующее

Определение. Бесконечномерное пространство Y называется пространством минимальной размерности, если для любого пространства X из

$$\dim_l X < \dim_l Y$$

следует конечномерность X.

Следствие 3. Если подпространство X пространства L_p является пространством минимальной размерности, то либо

$$\dim_l X = \dim_l l_p, \tag{8}$$

либо X изоморфно l_2. ~~Неизвестно, следует ли из (8) изоморфизм пространств X и l_p.~~

Используя множества $M^{\delta}_{\cancel{p}}$ можно уточнить теорему В. Орлича [3] о безусловно сходящихся рядах в L_p.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} f_k$ элементов L_p безусловно сходится и все его члены принадлежат какому-нибудь M_δ, то

$$\sum_{1}^{\infty} \| f_k \|^2 < \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Так как для любой функции $\| f \|_{L_2} \leqslant \| f \|_{L_p}$, то из безусловной сходимости ряда в L_p следует его безусловная сходимость в L_2 и, следовательно

$$\sum_{1}^{\infty} \| f_k \|_{L_2}^2 < \infty. \tag{10}$$

Так как неравенство (5) справедливо для всех функций из M_δ, то из (10) следует (9).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Paley, Some theorems on abstract spaces, Bull. Amer. Math. Soc., т. 42, 1936.
2. С. Банах, Курс функціонального аналізу. Радянська школа, 1948.
3. W. Orlicz, Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen Studia Math., т. 4, 1933.

Харьковский
автомобильно-дорожный институт

Дата поступления 3/III—58 г.