М. И. КАДЕЦ и Б. Я. ЛЕВИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С. БАНАХА О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. Банах ставит в „Курсе функционального анализа" (1) ряд вопросов, связанных с топологической эквивалентностью функциональных пространств. Особенно интересным среди этих вопросов он считает вопрос о гомеоморфизме пространств непрерывных функций, определенных соответственно на отрезке и на квадрате.

В этой статье мы устанавливаем топологическую эквивалентность пространства C — непрерывных функций, определенных на отрезке $[0. 1]$, пространству $C[I_n]$ непрерывных функций, определенных на любом n-мерном кубе. Доказательство основано на следующей теореме:

Теорема 1. *Пространство C гомеоморфно пространству $C[P]$ непрерывных функций, определенных на канторовом совершенном множестве P.*

Для доказательства прежде всего заметим, что пространство $C(P)$ изометрично пространству D функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, имеющих разрывы первого рода на некотором фиксированном счетном всюду плотном множестве точек

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \tag{1}$$

и непрерывных в остальных точках отрезка $[0, 1]$, причем $\|f\|_D = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$.

Действительно, пусть $t=\sigma(x)$ $[\sigma(0)=0,\ \sigma(1)=1)]$ — непрерывная, монотонная функция на $[0, 1]$, сохраняющая на каждом смежном для P интервале $u_j (j=1, 2, \ldots)$ постоянное значение t_j. Обратная функция $x=s(t)$, определенная и непрерывная всюду на $[0, 1]$, кроме точек t_j, имеет в этих точках правый и левый пределы, совпадающие с концами соответствующего смежного интервала. Каждой функции $\varphi(x)\in C[P]$ мы поставим в соответствие функцию $f(t)=\varphi[s(t)]$, принадлежащую D. Обратное отображение дается равенством $\varphi(x)=f[\sigma(x)]$. Очевидно, что это соответствие взаимно однозначное и изометрическое.

Итак, задача свелась к доказательству гомеоморфности D и C.

Наметим дальнейший план доказательства: с помощью некоторой конструкции, мы сопоставим взаимно однозначно каждой сходящейся к нулю числовой последовательности

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots \tag{2}$$

функцию $f_\delta(t)\in D$, у которой

$$\frac{f_\delta(t_k+0)-f_\delta(t_k-0)}{2}=\delta_k \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Это сопоставление мы проведем так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Совокупность всех $f_\delta(t)$ образует метрическое (не обязательно линейное) пространство $\Gamma \subset D$, топологически эквивалентное пространству c_0.

2. Всякая функция $f(t) \in D$ представляется единственным образом в виде

$$f(t) = f_\delta(t) + \tilde{f}(t), \tag{4}$$

где $f_\delta(t) \in \Gamma$, $\tilde{f}(t) \in C$, причем из сходимости последовательности элементов $f_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ из D следует сходимость соответствующих компонент в представлении (4) в пространствах Γ и C.

Если нам удастся провести такое построение, то мы тем самым докажем гомеоморфность D и топологического произведения $C \times \Gamma$, а следовательно D и $C \times c_0$. С другой стороны, по теореме Борсука (см. [1], стр. 153—156) пространства C и $C \times c_0$ гомеоморфны. Таким образом, задача свелась к построению функции $f_\delta(t)$ по заданной последовательности (2).

Это построение мы проведем следующим образом: определим по заданной последовательности (2) непрерывную функцию $\Delta(\eta)$, в целых точках равенством

$$\Delta(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \max_{k \geqslant n} |\delta_k| \tag{5}$$

и линейно — на отрезках $[n, n+1]$. Функция $\Delta(\eta)$ положительная и монотонно убывает к нулю при $\eta \to +\infty$.

С помощью этой функции мы построим бесконечно возрастающую последовательностью чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$, определяемых как единственное решение уравнения

$$\Delta(\eta_k) = \frac{1}{2^k} \Delta(1) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Определим далее функцию $\theta(n)$ в целых точках как длину наименьшего из интервалов, на которые отрезок $[0, 1]$ разбивается точками $t_1, t_2, \ldots, t_n$ множества (1) и продолжим ее линейно на отрезки $[n, n+1]$. Наконец, введем еще функцию $\tau(\eta)$, определенную в точках η_k равенствами

$$\tau(\eta_k) = \theta(\eta_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

и линейную на отрезках $[\eta_k, \eta_{k+1}]$.

Каждую точку t_k множества (1) покроем интервалом

$$L_k = \left(t_k - \frac{\tau(k)}{2};\ t_k + \frac{\tau(k)}{2}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Если теперь m и n натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $\eta_k \leqslant m < n \leqslant \eta_{k+1}$, то длины интервалов L_m и L_n меньше, чем расстояния между различными точками t_j при $j = 1, 2, \ldots, [\eta_{k+1}]$ и поэтому

$$L_m \cap L_n = 0.$$

Заметим, что интервалы L_n зависят не только от последовательности (1), но и от последовательности (2), так как числа η_k $k=1, 2, \ldots$ связаны с этой последовательностью.

Построим теперь последовательность функций $\psi_n(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1;$ $n=1, 2, \ldots)$, каждая из которых непрерывна всюду, за исключением точки t_n, в которой

$$\frac{\psi_n(t_n+0)-\psi_n(t_n-0)}{2}=\delta_n.$$

Функции $\psi_n(t)$ мы определим равенствами: $\psi_n(t)=0$ вне L_n и

$$\psi_n(t)=\begin{cases} -\frac{2\delta_n}{\tau(n)}\left[t-\left(t_n-\frac{\tau(n)}{2}\right)\right]; & t_n-\frac{\tau(n)}{2}<t<t_n. \\ -\frac{2\delta_n}{\tau(n)}\left[t-\left(t_n+\frac{\tau(n)}{2}\right)\right]; & t_n \leqslant t<t_n+\frac{\tau(n)}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что

$$\sup_{0<t\leqslant 1}|\psi_n(t)|=\delta_n<\Delta(n)$$

и при $n \geqslant \eta_k$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\psi_n(t)|<\Delta(\eta_n)=\frac{1}{2^k}\Delta(1). \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует, что

$$\sum_{\eta_k\leqslant n\leqslant\eta_{k+1}}|\psi_n(t)|<\frac{1}{2^k}\Delta(1).$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)$$

равномерно и абсолютно сходится на $[0, 1]$, причем

$$\sum_{n\geqslant\eta_k}|\psi_n(t)|<\frac{1}{2^{k-1}}\Delta(1). \tag{12}$$

Определим, наконец, функцию $f_\delta(t)$, отвечающую последовательности (2):

$$f_\delta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_n(t). \tag{13}$$

Множество таких функций, отвечающих всем последовательностям из c_0, образует метрическое пространство Γ, в котором расстояние определяется как

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f_{\delta'}(t)-f_\delta(t)|.$$

Докажем теперь топологическую эквивалентность пространств Γ и c_0. Пусть $\delta=\{\delta_k\}$ и $\delta'=\{\delta'_k\}$ — две сходящиеся к нулю числовые последовательности, а $f_\delta(t)$ и $f_{\delta'}(t)$ соответствующие функции из Γ. Так как

$$\sup_{\leqslant t\leqslant 1}|f_\delta(t)-f_{\delta'}(t)|\geqslant\max_k|\delta_k-\delta'_k|,$$

Так как c_0 гомеоморфно Γ, то отображение D на Γ, порожденное равенством (4), непрерывно. То же, очевидно, справедливо и для отображения D на C. Итак, мы доказали, что D, а, следовательно, и $C[P_1]$, гомеоморфно $C \times c_0$. Отсюда, по теореме Барсука, получается гомеоморфность $C[P]$ и C. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пространство $C[I_n]$ непрерывных функций на n-мерном кубе топологически эквивалентно при любом n пространству C функций непрерывных на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. Для простоты мы ограничимся случаем $n=2$. Обозначим через P_1 канторово множество на отрезке $[0,1]$ и через P_2 — канторово множество в квадрате I_2, т. е. множество точек, координаты которых выражаются по троичной системе числами вида

$$\begin{matrix} x=0,\, a_1a_2a_3\ldots \\ y=0,\, b_1b_2b_3\ldots \end{matrix} \quad a_k,\, b_k=0 \text{ или } 2.$$

Точке (x, y) множества P_2 можно поставить в соответствие точку

$$t=0,\, a_1b_1a_2b_2\ldots$$

множества P_1. Известно (см. напр. Хаусдорф [2]), что это соответствие взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Из наличия этого соответствия вытекает гомеоморфность пространств $C[P_1]$ и $C[P_2]$ непрерывных функций на P_1 и P_2.

По теореме I пространство $C[P_1]$ гомеоморфно пространству C и поэтому наша задача свелась к доказательству топологической эквивалентности пространств $C[P_2]$ и $C[I_2]$.

Пусть $f(x, y)$ непрерывная функция на P_2. Фиксируя y, мы получим непрерывную функцию от x на P_1.

По теореме I существует операция T_x, дающая топологическое отображение $C[P_1]$ на C.

Применяя эту операцию к функции $f(x, y)$ при фиксированном y, мы получим функцию

$$\varphi(x', y) = T_x f(x, y),$$

определенную на множестве $[0 \leqslant x' \leqslant 1,\ y \in P_1]$, которое мы будем обозначать Q. Пространство непрерывных функций на этом множестве мы обозначим $C[Q]$.

Докажем, что $\varphi(x', y)$ принадлежит $C[Q]$. Действительно, из равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ на множестве P_2 следует, что при данном $\eta > 0$, достаточно малом $\delta > 0$ и $|y_1 - y_2| < \delta$

$$\max_{x \in P_1} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \eta.$$

Отсюда, в силу непрерывности операции T_x следует, что при данном $\varepsilon > 0$, достаточно малом $\delta > 0$ и $|y_1 - y_2| < \delta$

$$\max_{0 \leqslant x' \leqslant 1} |\varphi(x', y_1) - \varphi(x', y_2)| < \varepsilon.$$

Кроме того, при фиксированном $y \in P_1$ функция $\varphi(x', y)$ — непрерывная функция от x' на $[0, 1]$. Отсюда непосредственно следует, что $\varphi(x', y)$ —

непрерывная функция на Q. Итак, операция T_x отображает $C[P_2]$ на $C[Q]$. Точно так же убеждаемся в том, что обратная операция переводит функции из $C[Q]$ в непрерывные функции на $C[P_2]$.

Покажем еще, что это соответствие непрерывно. Пусть

$$\|f_1(x, y)-f_2(x, y)\|_{C[P_2]}<\delta.$$

Тогда при любом фиксированном $y \in P_1$

$$\max_{x \in P_1} |f_1(x, y)-f_2(x, y)|<\delta.$$

Так как операция T_x непрерывна на $C[P_1]$, то при достаточно малом δ и $y \in P_1$

$$\max_{0 \leqslant x' \leqslant 1} |\varphi_1(x', y)-\varphi_2(x', y)|<\varepsilon,$$

или, в других терминах,

$$\|\varphi_1(x', y)-\varphi_2(x', y)\|_{C[Q]}<\varepsilon.$$

Точно так же доказывается непрерывность обратной операции. Итак, $C[P_2]$ гомеоморфно $C[Q]$. Применяя операцию T_y к функциям $C[Q]$, мы, очевидно, получим гомеоморфное соответствие между $C[Q]$ и $C[I_2]$.

Теорема доказана для $n=2$. Очевидно, что при любом $n>2$ гомеоморфизм устанавливается применением к функциям из $C[P_n]$ операции T по каждому из переменных.

(Поступило в редакцию 26. 1. 1956 г.)

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Банах. Курс функціонального аналізу. стр. 211, 153—157.
2. Хаусдорф. Теория множеств.