ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1960 МАТЕМАТИКА № 2 (15)

М. И. Кадец

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В РЕФЛЕКТИВНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Цель настоящей работы — освободиться от требования о наличии базиса в рефлективном пространстве при доказательстве теорем о градиенте слабо непрерывного функционала. Как мы увидим, использование метрических проекций вместо базиса позволяет почти дословно воспроизвести доказательства соответствующих теорем, приведенные в монографии М. М. Вайнберга ([1], § 7).

Теорема 1. *В сепарабельном банаховом пространстве можно ввести эквивалентную норму, относительно которой пространство будет строго нормированным*[1] *и, кроме того, для любой слабо сходящейся последовательности из условий*

$$x_n \xrightarrow{\text{сл}} x, \quad \|x_n\| \to \|x\|$$

будет следовать сильная сходимость:

$$\|x_n - x\| \to 0.$$

Доказательство этой теоремы приведено в [2].

Пусть теперь E — сепарабельное рефлективное пространство Банаха, норма которого удовлетворяет условиям теоремы 1. Это предположение допустимо, так как мы будем исследовать линейно-топологические, а не метрические свойства операторов. Рассмотрим замкнутое линейное подпространство $G \subset E$ и определим оператор P метрического проектирования на G следующим образом:

$$\|x - Px\| = \min_{y \in G} \|x - y\|. \tag{1}$$

Существование Px обеспечивается рефлективностью, а единственность — строгой нормированностью пространства E. Оператор P — непрерывный, однородный и частично аддитивный. Последнее означает, что

$$P(x + y) = Px + y \text{ для всех } y \in G. \tag{2}$$

Элементы, аннулируемые оператором P, мы будем называть ортогональными к G.

Лемма 1. *Множество элементов, ортогональных к G, замкнуто и гомеоморфно фактор-пространству E/G.*

Доказательство. Каждому элементу $x_0 \perp G$ сопоставим класс смежности $G_0 = x_0 + G$. Это соответствие, очевидно, взаимно одно-

---

1) Пространство называется строго нормированным, если для любых линейно независимых элементов x и y выполняется строгое неравенство треугольника:

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

значно. Оно непрерывно в одну сторону, так как из $x_n \to x_0$ следует $G_n \to G_0$. Пусть теперь $G_n \to G_0$; тогда $\| G_n \| \to \| G_0 \|$ и значит

$$\| x_n \| \to \| x_0 \| . \tag{3}$$

Так как E рефлективно, то последовательность x_n слабо компактна и все ее предельные элементы принадлежат G_0. Поскольку нормы всех элементов из G_0 больше, чем $\| x_0 \|$, то x_0 — единственная предельная точка, т. е.

$$x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) по теореме 1 следует, что $x_n \to x_0$. Замкнутость рассматриваемого множества следует из непрерывности оператора P.

Возьмем полную линейно независимую систему элементов сопряженного пространства

$$f_1, f_2, \ldots \quad (f_j \in E^*) \tag{5}$$

и образуем в E убывающую последовательность подпространств

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots,$$

где E_n — множество элементов, аннулируемых первыми n-функционалами последовательности (5). Множество элементов, ортогональных к E_n, обозначим E^n:

$$E^1 \subset E^2 \subset E^3 \subset \ldots .$$

Каждый элемент $x \in E$ может быть единственным образом представлен в виде

$$x = P^n x + P_n x,$$

где P_n — оператор проектирования на E_n, а $P^n x \in E^n$; заметим, что

$$\| P^n x \| \leqslant \| x \|.$$

Лемма 2. *Если последовательность x_m слабо сходится к x, то $P^m x_m$ тоже слабо сходится к x.*

Доказательство. Последовательность разностей $x_m - P^m x_m$ слабо компактна. Так как $x_m - P^m x_m \in E_n$ $(n \leqslant m)$, а пересечение всех E_n содержит только нуль пространства, то

$$x_m - P^m x_m \xrightarrow{\text{сл}} 0,$$

что и доказывает лемму.

Теорема 2. *Для того, чтобы непрерывный оператор F, заданный в сепарабельном рефлективном пространстве Банаха, был усиленно непрерывным в шаре $D_r(\| x \| \leqslant r)$, необходимо и достаточно, чтобы каждому $\varepsilon > 0$ отвечало такое натуральное $n_0(\varepsilon)$, что для всякого $n > n_0$ и произвольного $x \in D_r$ имело место неравенство*

$$\| F P^n x - F x \| < \varepsilon. \tag{6}$$

Доказательство необходимости. Если неравенство (6) не имеет места, то найдется последовательность $x_{n_k} \in D_r$, слабо сходящаяся к $x_0 \in D_r$ и такая, что

$$\| F P^{n_k} x_{n_k} - F x_{n_k} \| \geqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Но, согласно лемме 2, последовательность $P^{n_k} x_{n_k}$ также слабо сходится к x_0 и неравенство (7) противоречит усиленной непрерывности оператора F.

Доказательство достаточности. Пусть $x_m \in D_r$ слабо сходится к $x_0 \in D_r$. Фиксируем n так, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$

и любого $x \in D_r$ выполнялось неравенство

$$\|FP^n x - Fx\| < \frac{1}{4}\varepsilon;$$

тогда

$$\|Fx_m - Fx_0\| \leqslant \|Fx_m - FP^n x_m\| + \|FP^n x_m - FP^n x_0\| + \|FP^n x_0 - Fx_0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|FP^n x_m - FP^n x_0\|.$$

Так как оператор F непрерывен, то достаточно доказать, что последовательность $P^n x_m$ сильно сходится к $P^n x_0$. По лемме 1 последовательность $P^n x_m$ компактна как ограниченная часть множества, гомеоморфного n-мерному пространству, и каждая ее предельная точка имеет вид $P^n y$. Так как x_m слабо сходится к x_0, то последовательность классов $\{x_m + E_n\}$ сходится сильно к классу $\{x_0 + E_n\}$, в силу конечномерности фактор-пространства E/E_n. Значит все предельные точки последовательности $P^n x_m$ принадлежат классу $\{x_0 + E_n\}$ и поэтому

$$\lim_{m\to\infty} P^n x_m = P^n x_0,$$

поскольку этот класс содержит единственную точку вида $P^n y$.

Введем теперь в пространстве E новую эквивалентную норму ($\|\ \|^{(1)}$), относительно которой сопряженное пространство E^* было бы строго нормированным. Рассмотрим последовательность подпространств пространства E^*:

$$E_1^* \subset E_2^* \subset E_3^* \subset \ldots,$$

где E_n^* — линейная оболочка первых n членов последовательности (5). Для каждого E_n^* определим относительно нормы $\|\ \|^{(1)}$ оператор метрического проектирования $\breve{P}_n$. Каждый элемент $f \in E^*$ представляется единственным образом в виде

$$f = \breve{P}_n f + \breve{P}^n f,$$

где $\breve{P}^n f$ ортогонален к E_n^*, а $\breve{P}_n f \in E_n^*$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1. *Функционал $F(x)$ непрерывен в E и слабо непрерывен в $D_{r+\alpha}$ при некотором $\alpha > 0$.*

2. *$dF(x, h)$ является равномерным в D_r. Тогда $\Gamma x = \operatorname{grad} F(x)$ компактен в шаре D_r.*

Доказательство. Пусть h — произвольный элемент из E_n с единичной нормой, $x \in D_r$; тогда

$$F(x + th) - F(x) = t(\Gamma x, h) + \omega(x; th), \tag{8}$$

при любом действительном t. Так как $h \in E_n$, то $(\breve{P}^n \Gamma x, h) = 0$ и поэтому

$$(\Gamma x, h) = (\breve{P}_n \Gamma x, h).$$

Так как $\breve{P}_x \Gamma x$ ортогонален E_n^* по норме $\|\ \|^{(1)}$, то в E_n можно найти нормированный элемент h_0 такой, что

$$(\breve{P}_n \Gamma x, h_0) = \|\breve{P}_n \Gamma x\|^{(1)} \geqslant \gamma \|\breve{P}_n \Gamma x\|.$$

Последнее неравенство следует из эквивалентности рассматриваемых норм. Подставим h_0 в (8) и определим $\|\breve{P}_n \Gamma x\|$:

$$\gamma t \cdot \|\breve{P}_n \Gamma x\| \leqslant |F(x + th_0) - F(x) - \omega(x; th_0)|. \tag{9}$$

Из частичной аддитивности оператора P_n следует

$$P^n(x+th_0)=x+th_0-P_n(x+th_0)=x-P_nx=P^nx.$$

Поэтому (9) можно переписать в виде

$$\gamma t\|\widetilde{P}_n\Gamma x\|\leqslant|F(x+th_0)-FP^n(x+th_0)|+|FP^n(x)-F(x)|+ \\ +|\omega(x;\ th_0|. \tag{10}$$

Выберем t настолько малым, чтобы удовлетворить неравенствам:

$$t<\alpha;\quad |\omega(x,\ th_0)|<\frac{\varepsilon}{3}\gamma t. \tag{11}$$

Затем подберем n_0 такое, чтобы для всех $n>n_0$ было

$$|F(x+th_0)-FP^n(x+th_0)|<\frac{\varepsilon}{3}\gamma t;\quad |FP^n(x)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\gamma t. \tag{12}$$

Из (10), (11), (12) получаем

$$\|P_n\Gamma x\|<\varepsilon. \tag{13}$$

Так как оператор Γ ограничен, то условие (13) достаточно для компактности оператора Γ в D_r. Соответствующий критерий компактности доказан в [3].

Аналогично доказывается, что и другие теоремы из ([1], § 7) сохраняются при отказе от требования о наличии базиса.

Харьковский автомобильно-дорожный институт

Поступило
26 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов ГИТТЛ, М., 1956.

М. И. Кадец. О слабой и сильной сходимости. ДАН СССР, т. 122, № 1, 1958.

М. И. Кадец. О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха. ДАН СССР, т. 92, № 3, 1953.