ДОПОВІДІ
АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНСЬКОЇ РСР

9

ОКРЕМИЙ ВІДБИТОК

ВИДАВНИЦТВО АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНСЬКОЇ РСР
1959

МАТЕМАТИКА

М. И. КАДЕЦЬ

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ СЛАБОЮ ТА СИЛЬНОЮ ЗБІЖНІСТЮ

(Представив академік АН УРСР Б. В. Гнєденко)

Як відомо, слаба збіжна послідовність елементів простору Банаха не обов'язково збігається за нормою. Виняток становлять простір l та деякі його узагальнення, де слаба збіжність еквівалентна збіжності за нормою. Для рівномірно опуклих просторів відома така теорема [1]. Якщо послідовність $\{x_n\}$ слабо збігається до елемента x і $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.

Нехай Γ лінійна тотальна множина лінійних функціоналів, означених в сепарабельному банаховому просторі E, яка задовольняє умові: існує така $\eta > 0$, що для кожного $x \in E$ знайдеться $f \in \Gamma$, який задовольняє нерівності

$$|f(x)| \geqslant \eta \|f\| \cdot \|x\|. \tag{1}$$

Якщо E простір з базисом, то за множину Γ можна взяти лінійну оболонку функціоналів, біортогональних до елементів базису. Якщо $E = \overline{E}_1$ — сепарабельний спряжений простір, то за Γ можна взяти сукупність слабо неперервних лінійних функціоналів, тобто функціоналів, породжених елементами простору E_1.

Теорема 1. В сепарабельному просторі Банаха E можна впровадити нову норму $\|\,\|^*$, еквівалентну звичайній, і таку, що для множини Γ, означеної вище, з умов:

а) послідовність $\{x_n\}$ слабо збігається до елемента x відносно Γ, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n - x) = 0$ для всіх $f \in \Gamma$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|^* = \|x\|^*$

випливає збіжність за нормою:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^* = 0.$$

В спряженому просторі $\overline{E}$ візьмемо переріз множини Γ з одиничною кулею S і розглянемо найменшу слабо замкнену (в розумінні слабої збіжності функціоналів) множину K, що містить в собі переріз $\Gamma \cap S$. Маючи на увазі, що K є компакт відносно слабої збіжності, впровадимо в ньому відповідну метрику. Нехай діаметр K дорівнює одиниці; тепер ми будемо розглядати K як метричну компактну множину, переріз якої з Γ є густий в K. Для кожного елемента $x \in E$ означимо модуль неперервності відносно K:

$$\omega(x, \delta) = \sup_{\rho(f_1, f_2) < \delta} |f_1(x) - f_2(x)|; \quad (f_1, f_2 \in K). \tag{2}$$

Лема. Якщо послідовність $z_n \in E$ слабо збігається до нуля відносно множини лінійних функціоналів, густої в компакті K, то:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(z_n, \delta) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{f \in K} |f(z_n)|$,

$$б) \varliminf_{n \to \infty} \omega(x + z_n, \delta) \geq \omega(x, \delta)$$

для $0 < \delta \leq 1$ і довільного $x \in E$.

За допомогою модуля неперервності побудуємо норму, що задовольняє вимоги теореми 1:

$$\|x\|^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \omega\left(x, \frac{1}{k}\right). \tag{3}$$

Доведення теореми 1 і допоміжних тверджень майже тотожно з аналогічними доведеннями в статті [2].

Теорему 1 можна використати для встановлення топологічної еквівалентності всіх спряжених сепарабельних банахових просторів. Нехай $E = \overline{E}_1$ спряжений сепарабельний простір Банаха; $\|\,\|^{(0)}$ еквівалентна норма яка робить E строго нормованим. Тоді норма

$$\|x\|_1 = \|x\|^{(0)} + \|x\|^* \quad (x \in E)$$

залишає E строго нормованим і одночасно задовольняє умови теореми 1. Нехай

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{4}$$

тотальна множина лінійно незалежних слабо неперервних лінійних функціоналів. Позначимо $P_n \subset E$ множину елементів, які анулюються першими n функціоналами послідовності (4). Очевидно,

$$P_0 \supset P_1 \supset \ldots; \quad P_0 = E; \quad def\, P_n = n; \quad \prod_1^{\infty} P_n = \theta.$$

Визначимо для кожного $x \in E$ відхилення:

$$H_n(x) = \inf_{y \in P_n} \|x - y\|_1 = \|x - x_n\|_1 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

де x_n — єдиний елемент найкращого наближення, існування якого випливає з слабої неперервності функціоналів f_n. Зваживши на те, що кожний підпростір P_{n-1} розбивається P_n на частини

$$P_{n-1} = P_{n-1}^{+} + P_n + P_{n-1}^{-},$$

визначимо також послідовність функціоналів $\varepsilon_n(x)$:

$$\varepsilon_0(x) = 0; \quad \varepsilon_n(x) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } x_{n-1} \in P_{n-1}^{+}, \\ -1, & \text{якщо } x_{n-1} \in P_{n-1}^{-}, \\ \varepsilon_{n-1}(x), & \text{якщо } x_{n-1} \in P_n, \text{тобто } H_{n-1}(x) = H_n(x). \end{cases}$$

Теорема 2. Для кожної обмеженої послідовності дійсних чисел

$$h_1, h_2, h_3, \ldots,$$

що задовольняє умови: $|h_n| \leq |h_{n+1}|$; якщо $|h_n| = |h_{n+1}|$, то $h_n = h_{n+1}$, існує точно один елемент $x \in \varepsilon$, для якого

$$\varepsilon_n(x) \cdot H_n(x) = h_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Крім того,

$$\lim_{n \to \infty} H_n(x) = \|x\|.$$

Теорема 3. Нехай X та Y два спряжених сепарабельних простори Банаха, в кожному з яких визначені функціонали H_n і ε_n. Припорядкуємо кожному $x \in X$ елемент $y \in Y$ такий, що

$$\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n(y); \quad H_n(x) = H_n(y), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Це співвідношення взаємно однозначне і взаємно неперервне, тобто простори X і Y гомеоморфні.

Доведення теорем 2 та 3 відрізняється від доведення аналогічних теорем в [2] в одному пункті: замість слабої компактності обмежених множин в рефлективних просторах тут використовується слаба компактність обмежених множин лінійних функціоналів, означених в сепарабельному просторі.

Метод найкращих наближень в тому вигляді, в якому він викладений в цій статті, дозволив автору послідовно довести гомеоморфізм сепарабельних рівномірно опуклих [3], рефлективних [2] і, нарешті, спряжених просторів. Виникає питання, чи можна прикласти цей метод до інших класів просторів Банаха, просуваючись, з одного боку, до встановлення топологічної еквівалентності всіх сепарабельних банахових просторів, а з другого боку, одержати результати для несепарабельних просторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Л. Шмульян, ДАН СССР, 24, 647 (1939).
2. М. И. Кадец, ДАН СССР, 122, 13 (1958).
3. М. И. Кадец, УМН, 10, 4 (66), 137 (1955).

Харківський автомобільно-дорожний інститут

Надійшло до редакції 10.XI 1958 р.

М. И. КАДЕЦ

О СВЯЗИ МЕЖДУ СЛАБОЙ И СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТЬЮ

(Представлено академиком АН УССР Б. В. Гнеденко)

Резюме

Пусть Γ линейное тотальное множество линейных функционалов, определенных в сепарабельном банаховом пространстве E, удовлетворяющее условию: существует $\eta > 0$ такое, что для каждого $x \in E$ найдется $f \in \Gamma$, удовлетворяющий неравенству

$$|f(x)| \geqslant \eta \cdot \|f\| \cdot \|x\|.$$

Если E пространство с базисом, то в качестве Γ можно взять линейную оболочку функционалов, биортогональных базису. Если $E = \overline{E}_1$, сепарабельное сопряженное пространство, то в качестве Γ можно взять совокупность слабо непрерывных линейных функционалов, т. е. функционалов, порожденных элементами пространства E_1.

Теорема 1. В сепарабельном пространстве Банаха E можно ввести новую норму $\|\ \|^*$, эквивалентную обычной, такую, что из условий:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} f(x_n - x) = 0 \text{ для всех } f \in \Gamma,$$

$$\text{б) } \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^* = \|x\|^*$$

следует сильная сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^* = 0.$$

С помощью теоремы 1 может быть доказана теорема 2.

Теорема 2. Все сепарабельные сопряженные пространства Банаха гомеоморфны.

M. I. KADETS

ON THE CONNECTION BETWEEN WEAK AND STRONG CONVERGENCE

(*Presented by B. V. Gnedenko, Member Academy of Sciences, Ukrainian SSR*)

Summary

Let Γ be a linear total set of linear functionals defined in a separable Banach space E and satisfying the following condition: there exists such a number $\eta > 0$ that for every $x \in E$ an $f \in \Gamma$ can be found satisfying the inequality

$$|f(x)| \geqslant \eta \cdot \|f\| \cdot \|x\|.$$

If E is a space which has a basis, Γ may be a linear hull of functionals, which are biorthogonal to the elements of the basis. If $E = \overline{E}_1$ is separable conjugate Banach space, Γ may be a set of weak continuous linear functionals, i. e. functionals generated by the elements of the space E_1.

Theorem 1. A new norm $\| \ \|^*$ may be defined in E, equivalent to the usual one and causing the conditions

$$\text{a)} \ \lim_{n \to \infty} f(x_n - x) = 0 \ \text{for all} \ f \in \Gamma,$$

$$\text{b)} \ \lim_{n \to \infty} \| x_n \|^* = \| x \|^*$$

to result in strong convergence:

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \|^* = 0.$$

With the aid of the theorem 1 we may prove

Theorem 2: All separable conjugate Banach spaces are homeomorphic.
