Министерство высшего образования УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

М. И. КАДЕЦ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Харьков—1955

Работа посвящена установлению топологической эквивалентности некоторых сепарабельных пространств Банаха. Этому вопросу были посвящены работы Мазура [1] и Качмажа [2]. Мазур установил топологическую эквивалентность пространств L_p и l_q для любых $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$. Качмаж обобщил этот результат на случай пространств Орлича.

Банах в „Курсе функционального анализа“ [3] так характеризует состояние исследуемого вопроса: „Неизвестно ни одного примера двух сепарабельных пространств типа B с бесконечным числом измерений, которые не были бы гомеоморфны. С другой стороны неизвестно, как доказать, например, что пространство C гомеоморфно c. Одновременно не удается доказать гомеоморфизм между пространствами C и l. Неизвестно ни одного примера двух компактных метрических пространств с конечным но различным числом измерений таких, что пространства непрерывных функций определенных на них были бы гомеоморфны“. Насколько известно автору, поставленные Банахом вопросы оставались открытыми до самого последнего времени.

Глава I

Изоморфизм и гомеоморфизм Банаховых пространств

В § 1 этой главы приводится ряд теорем Борсука [3] об изоморфизме некоторых пространств Банаха (под изоморфизмом мы понимаем линейное взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между пространствами; если соответствие сверх того сохраняет норму, то пространства называются эквивалентными). Из теорем этого параграфа важное значение для дальнейшего имеет.

Теорема 1. Пространство C изоморфно произведению пространств $C \times c$.

Основным результатом § 2 и всей главы является.

Теорема 4 *) Пространство C гомеоморфно пространству $C[P]$ непрерывных функций, определенных на канторовском совершенном множестве P.

*) Мы сохраняем нумерацию теорем диссертации.

Идея доказательства состоит в следующем. Вместо пространства $C[P]$ вводим эквивалентное ему пространство D функций, определенных на отрезке $[0,1]$, имеющих разрывы первого рода на некотором счетном всюду плотном множестве и непрерывных в остальных точках. Пространство C является линейным подпространством пространства D. Конструируем метрическое пространство $\Gamma \subset D$, являющееся дополнением к C в том смысле, что каждая функция $x(t) \in D$ представляется единственным образом в виде

$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_\delta(t)$$

где $\tilde{x}(t) \in C$; $x_\delta(t) \in \Gamma$. Метрическое пространство Γ оказывается гомеоморфным пространству c, и доказательство завершается ссылкой на теорему 1.

Теорема 4 дает утвердительный ответ на вопрос Банаха о существовании гомеоморфных пространств непрерывных функций, определенных на множествах различного числа измерений.

В § 3 приводится принадлежащее Мазуру доказательство топологической эквивалентности пространства L_p и l_q $(p \geqslant 1;\ q \geqslant 1)$. Если $f(x) \in L_p$, а $g(x) \in L$, то оказывается, что соответствие

$$g(x) = |f(x)|^p \operatorname{sign} f(x)$$

является гомеоморфизмом. Аналогично устанавливается гомеоморфизм между l_p и l. Связь между пространствами L и l устанавливается благодаря эквивалентности пространств L_2 и l_2 (теорема Фишера-Рисса).

Глава II

Применение одной теоремы С. Н. Бернштейна к установлению топологической эквивалентности пространств Банаха *)

В § 1 вводится понятие T — системы, являющейся обобщением систем Чебышева в пространстве C. Пусть

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

полная линейно независимая система элементов сепарабельного банахова пространства E. Для каждого элемента $y \in E$ можно определить систему уклонений

$$E_n[y] = \min_{\lambda_\kappa} \| y - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \lambda_\kappa x_\kappa \| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Если этот минимум для каждого $y \in E$ и любого натурального n достигается на единственном многочлене

$$y_n = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \lambda_\kappa^{(n)} x_\kappa,$$

то последовательность (1) называется T-системой,

*) Основные результаты этой главы опубликованы в [4].

В строго нормированном пространстве всякая полная линейно независимая система будет, очевидно, T-системой. В этой связи представляет интерес принадлежащая Кларксону [5].

Теорема 1. Всякое сепарабельное пространство Банаха изоморфно некоторому строго нормированному пространству.

При доказательстве последующих теорем важную роль играет следующий критерий компактности:

Лемма 1. Чтобы некоторое множество M элементов пространства Банаха с T-системой было компактно, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$e_j = \sup_{y \in M} E_j[y] \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

сходилась к нулю.

Доказательство этого критерия по существу содержится в теореме С. Н. Бернштейна.

Уклонение $E_n[y]$ по определению не отрицательно, однако для дальнейшего оказывается полезным приписать ему знак следующим образом:

$$\operatorname{sign} E_n[y] = \begin{cases} \operatorname{sign} \lambda_n^{(n+1)} \text{ при } \lambda_n^{(n+1)} \neq 0 \\ \operatorname{sign} E_{n+1}[y] \text{ при } \lambda_n^{(n+1)} = 0 \end{cases}$$

где λ_n^{n+1} — коэффициент при x_n в многочлене наилучшего приближения $y_{n+1} = \sum_{\kappa=0}^{n} \lambda_\kappa^{(n+1)} x_\kappa$

В 1930 г. на Первом всесоюзном съезде математиков С. Н. Бернштейн поставил следующую задачу: „дана монотонная последовательность чисел α_n, сходящая к нулю; узнать, существуют ли такие функции $f(x)$, что $E_n[f(x)] = \alpha_n$". В 1938 г. в заметке [6] С. Н. Бернштейн доказал существование функции с заданными уклонениями. Теорема С. Н. Бернштейна легко переносится на произвольные пространства Банаха:

Теорема 2. Для любой последовательности действительных чисел α_j, удовлетворяющей условиям:

1. $\lim\limits_{j \to \infty} \alpha_j = 0$
2. $|\alpha_j| \geqslant |\alpha_{j+1}|$
3. если $|\alpha_j| = |\alpha_{j+1}|$, то $\alpha_j = \alpha_{j+1}$,

существует y, для которого

$$E_j[y] = \alpha_j \ (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

(с учетом введенного выше знака уклонения).

Вопрос о единственности элемента с данными уклонениями в общем случае остается открытым. Этот вопрос остается открытым и для пространства C, то есть в условиях теоремы С. Н. Бернштейна.

В § 2 дается частичное решение вопроса о единственности элемента с данными уклонениями:

Теорема 3. Множество тех элементов, которые определяются своими уклонениями единственным образом, есть всюду плотное G_δ и следовательно II категории относительно любой сферы пространства.

Основным во второй главе является § 3, посвященный установлению связи между наилучшими приближениями и топологической эквивалентностью пространств Банаха. Будем говорить, что для данного пространства и данной в нем Т-системы выполняется условие Бернштейна, если каждой системе уклонений соответствует единственный элемент. В частности, условие Бернштейна выполняется в пространствах $e_p (p \geqslant 1)$, если в качестве Т-системы взять канонический базис. Доказывается следующая

Теорема 4. Пространства, в которых выполняется условие Бернштейна, топологически эквивалентны.

Требуемое соответствие получается, если сопоставлять элементы двух пространств, обладающие одинаковыми уклонениями. При доказательстве взаимной непрерывности полученного взаимно однозначного соответствия используется лемма 1.

В § 4 с помощью основной теоремы 4 устанавливается топологическая эквивалентность пространств c и l. Вместо пространства c рассматриваем изоморфное ему пространство c_0 сходящихся к нулю числовых последовательностей. С помощью некоторой специальной метрики, эквивалентной обычной, c_0 превращается в строго нормированное пространство c_0^*, удовлетворяющее условию Бернштейна.

При установлении топологической эквивалентности банаховых пространств с помощью теоремы 4 основная трудность состоит в установлении выполнимости условия Бернштейна. Эта трудность не преодолена, например, для таких важных пространств как C или $L_p (p \neq 2)$. Поэтому естественно попытаться, сохранив существо метода, так видоизменить его подходящим выбором системы приближающих подпространств, чтобы вопрос о единственности элемента с заданными уклонениями решался без труда. Такой попытке посвящена III глава реферируемой работы.

Глава III

Топологическая эквивалентность сепарабельных равномерно выпуклых пространств

Согласно определению Кларксона [5] пространство E называется равномерно выпуклым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $x, y \in E$; $\|x\| = \|y\| = 1, \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geqslant 1 - \delta$ следует $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. В некоторых случаях более полезным оказывается следующее.

Определение. Пространство Банаха называется равномерно выпуклым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что всякая плоскость, отстоящая от начала на расстоянии $1 - \delta$, отсекает от единичной сферы множество диаметра, не превосходящего ε.

В лемме 1 приводится доказательство эквивалентности этих определений. Равномерная выпуклость пространства может быть охарактеризована с помощью модуля выпуклости $\varepsilon(\delta)$, равного верхней грани диаметров множеств, отсекаемых от единичной сферы плоскостями, отстоящими от начала на расстоянии $1 - \delta$. Для равномерно выпуклых пространств и только для них $\lim\limits_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0$.

Назовем элемент x ортогональным к линейному подпространству P, если $\|x + y\| \geqslant \|x\|$ для каждого $y \in P$. Справедлива следующая

Лемма 3. Множество нормированных элементов равномерно выпуклого пространства, ортогональных к подпространству с конечным дефектом, компактно.

В § 2 рассматривается обратная задача теории наилучших приближений в равномерно выпуклом пространстве, причем в качестве приближающих линейных подпространств берем последовательность

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots ..$$

такую, что $def P_n = n$, а пересечение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} P_n$ содержит только нуль пространства. Для каждого элемента x определяются уклонения

$$H_n[x] = \min_{y \in P_n} \|x - y\| = \|x - x_n\| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots.).$$

Существование и единственность элемента наилучшего приближения x_n обеспечивается равномерной выпуклостью пространства.

Для любого n, очевидно

$$H_n[x] \leqslant H_{n+1}[x] \leqslant \|x\|$$

Каждому отличному от нуля уклонению $H_n[x]$ приписываем знак $\operatorname{sign} H_n[x]$ подобно тому, как это делалось в главе II. Имеет место аналогичная теореме С. Н. Бернштейна

Теорема 1. Какова бы ни была ограниченная последовательность действительных чисел

$$h_1, h_2, h_3, \ldots\ldots,$$

удовлетворяющая условиям

1. $|h_j \leqslant |h_{j+1}|$

2. если $|h_j| = |h_{j+1}|$, то $h_j = h_{j+1}$,

существует единственный элемент x, для которого

$$H_n[x] = h_n \quad (n = 1, 2, \ldots.)$$

причем $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} |h_n|$.

Теорема 1 может быть перенесена на строго нормированные рефлективные пространства.

В § 3 полученные результаты применены к установлению топологической эквивалентности всех сепарабельных равномерно выпуклых пространств. Предварительно доказывается следующий критерий компактности:

Лемма 6. Чтобы ограниченное множество M равномерно выпуклого пространства было компактно, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$g_n = \sup_{x\in M}\{\|x\| - H_n[x]\} \quad n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

сходилась к нулю.

С помощью леммы доказывается основная в этой главе

Теорема 2. Сепарабельные равномерно выпуклые пространства топологически эквивалентны.

Доказательство сводится к сопоставлению элементов, обладающих одинаковыми уклонениями.

В § 4 устанавливаются оценки для модуля выпуклости пространств $L_p (p>1)$, равномерная выпуклость которых была доказана Кларксоном [5]. Оказывается, что

$$k\delta^{\frac{1}{2}} < \varepsilon(\delta) < K\delta^{\frac{1}{2}} \quad (1 < p < 2)$$

и

$$k\delta^{\frac{1}{p}} < \varepsilon(\delta) < K\delta^{\frac{1}{p}} \ (p \geqslant 2)$$

где k и K некоторые постоянные, зависящие только от p. Для $1 < p < 2$ приведенная оценка лучше той, которая получается из неравенства Кларксона.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. Мазур. „Заметка о гомеоморфизме функциональных пространств (Studia Math. т. I, стор. 83—85, 1929 г.).

2. С. Качмаж. „О гомеоморфизме некоторых пространств (Bull. Inter. de l'Acad. Polonais Ser. A, № 4—9, 1933 г).

3. С. Банах. „Курс функціонального аналізу" (1948).

4. М. И. Кадец „О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха (ДАН СССР, т. 92 № 3, 1953 г., стр. 465—468).

5. И. Кларксон. „Равномерно выпуклые пространства" (Trans. Amer. Math. Soc., т. 40, 1936 г).

6. С. Н. Бернштейн. „Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций (Собр. соч., т. 2, стр. 292—294).

Ответственный за выпуск
проф. *Н. И. Ахиезер*

Подписано к печати 25/VI 1955 г. БЦ 12032. Объем 1 п. лист. Формат бумаги $60 \times 92^1/_{16}$. В одном печ. листе 42.000 тип. зн. Зак. 1200. Тираж 100.
Бесплатно.

Типография издательства Харьковского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета им. А. М. Горького, Университетская, 16.