Proof. Let $L = \{x \in |\mathfrak{V}_2| : Tx = 0\}$. The mapping T can be factorized to a one-to-one closed mapping $\tilde{T}$ of $|\mathfrak{V}_2|L|$ into $|\mathfrak{V}_1|$. Here L is closed in $[\mathfrak{V}_2]$ and then $\mathfrak{V}_2/L$ is an $(\mathscr{F})$-sequence. Denote by Y the image of T in $[\mathfrak{V}_1]$ and let $\mathfrak{V} = \{(Y \cap |n\mathfrak{V}_1|, \|\cdot\|_{\mathfrak{V}_{1,n}})\}$. The mapping $\tilde{T}^{-1}$ is closed, maps $|\mathfrak{V}| = Y$ onto $|\mathfrak{V}_2|$ and, moreover, $\tilde{T}^{-1}|p\mathfrak{V}_1| \supset |k_p(\mathfrak{V}_2/L)|$.

Applying Theorem 3 we find that $\tilde{T}^{-1}$ is open, consequently $\tilde{T}$ is continuous and then T must be continuous as well which finishes the proof of Theorem 4.

References

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne.

[2] W. Słowikowski, *On continuity of inverse operators*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), p. 467-470.

[3] — *Quotient spaces and the Open Map Theorem*, ibid., p. 498-500.

[4] — *On the continuity of inverse operators in (LF)-spaces*, ibid., 69 (1963), p. 832-834.

[5] — *The concept of inductive family of (F)-spaces in connection with solvability of linear equations*, Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1963), p. 517-520.

[6] — *Linear operators in spaces of distributional type*, ibid., p. 517-520.

[7] — *The concept of (F)-sequence*, ibid., 12 (1964), p. 465-470.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 16. 6. 1964

Базисные последовательности, биортогональные системы и нормирующие множества в пространствах Банаха и Фреше

М. И. КАДЕЦ (Харьков) и А. ПЕЛЧИНЬСКИ (Варшава)

В монографии Банаха [1], стр. 238, приводится без доказательства результат, что любое бесконечномерное банаховое пространство содержит бесконечномерное замкнутое подпространство с базисом. Начиная с 1958 года появилось в литературе несколько доказательств этого факта ([12], [2], [4] и [9]). Как показано в [2] и [4] результат Банаха остаётся верный также в случае любого бесконечномерного пространства Фреше (= локально-выпуклого, полного, линейно-метрического пространства). Доказательство, данное в [4], основано на неопубликованном доказательстве Мазура для пространств Банаха, изложенном им на одном из заседаний семинара по функциональному анализу в Варшавском Университете в 1955 году. Недавнее доказательство Дэя усиливает результат Банаха, показывая, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве X существует биортогональная система (x_n, x_n^*) такая, что $\|x_n\| = \|x_n^*\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и последовательность (x_n)-базисная, т. е. образующая базис в подпространстве пространства X. Другие конструкции разных видов биортогональных систем и базисных последовательностей можно найти в работах [18], [19], [20], [33] и [7]. В работе [18], см. тоже [43], доказывается существование в любом бесконечномерном пространстве Банаха X условных базисных последовательностей, т. е. образующих не безусловный ([10], стр. 73) базис в подпространстве X. С другой стороны, в [7] показано, что в любом пространстве Фреше, которое не изоморфно никакому банаховому пространству, существует бесконечная безусловная базисная последовательность (натягивающая ядерное пространство). Вопрос [3], [9], [41], существует ли в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве бесконечная безусловная базисная последовательность, остаётся открытым, и, повидимому, является трудным. Другие нерешённые вопросы можно найти в реферате [41] и в обзорной статье Зингера [46]. С помощью базисных последовательностей и биортогональных систем можно получить разные характеристики рефлексивности. Так например, в любом нерефлексивном банаховом пространстве существует нерефлексивное подпространство с базисом. Этот результат приводится без доказательства Джэймсом [22]; по поводу доказательства см. [40]. Оказывается, что в нерефлексивных (и только в таких, см. [21]) банаховых пространствах существуют базисные последовательности такие, что положительный конус, натягиваемый ими, изоморфен положительному конусу в пространстве l (или в c_0); см. [40] и [45]. Близкие конструкции биортогональных систем, но не базисных последовательностей, даны Джэймсом [23], [24], Птаком [38] В. Д. Мильманом и Д. П. Мильманом [35], [35ª]. В похожих терминах можно дать характеристику произвольного ограниченного неслабокомпактного выпуклого, замкнутого множества в любом банаховом пространстве. [25]. В [42] метод базисных последовательностей применён для доказательства теоремы Эберлейна-Шмульяна. Дальнейшие результаты см. [25ª].

Большая часть настоящей работы посвящена следующим вопросам:

В произвольном пространстве Фреше X задано бесконечное множество A.

1° Можно ли из A выделить бесконечную базисную последовательность?

2° Натягивает ли бесконечная часть A бесконечномерное подпространство с базисом?

Оказывается, что ответ на 2° всегда положительный, если только A не компактное ограниченное подмножество X. Если при этом слабое замыкание A в X не слабо-компактно, или A содержит слабо, но не сильно сходящуюся к нулю последовательность, тогда ответ на 1° тоже положительный. Замыкание множества A не слабо компактно в том и только в том случае, когда A содержит базисную последовательность, для которой нуль не является слабой предельной точкой. Эти результаты содержит теорема 2 (и её следствия) настоящей работы. Доказательство теоремы 2 основано на теореме 1, которая, грубо говоря, состоит в том, что для ограниченного не компактного множества ответ на 1° положительный тогда и только тогда, когда нуль является предельной точкой для множества A относительно Γ-слабой сходимости, где Γ некоторое нормирующие множество в сильно сопряжённом пространстве к пространству X. Такого типа результаты для точно нормирующих множеств (т. е. $\sup\limits_{\|x^*\|=1;x^*\in\Gamma}|x^*x| = \|x\|$) в случае банаховых пространств впервые получены Бэссагой (Bessaga) в эго диссертации в 1958 году (см. [40]). Обобщение на случай произвольных нормирующих множеств получено в настоящей работе другим методом, путём замены исходной нормы в пространстве (или полунорм) эквивалентной „почти равномерно выпуклой'' нормой (соотв. полунормами). Наша конструкция такой нормы (предложение 1) немного более общая чем в работах Кадеца [26], [27], [28], [29]. Метод замены полунорм используется также при доказательстве теоремы 3 о разбиении любой нормирующей биортогональной системы на базис со скобками. Аналогичный результат для банаховых пространств получен раньше Кадецом [30], [31].

Последняя часть работы посвящена обобщениям одной теоремы Орлича [36], [37] об ортогональных разложениях в некоторых функциональных пространствах. Теорема 4 настоящей статии (см. [31]) состоит в следующим: Пусть X сепарабельное пространство Фреше; (x_n, x_n^*) — биортогональная система $(x_n \in X, x_n^* \in X^*)$, причём, последовательность (x_n^*) натягивает нормирующие множества. Пусть элемент $x \in X$ обладает следующим свойством: для любой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, составленной из чисел $\varepsilon_n = \pm 1$, найдется элемент x_ε такой, что $x_n^*(x_\varepsilon) = \varepsilon_n x_n^*(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда разложение $x \sim \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ безусловно сходится к элементу x. Другие обобщения содержатся в теоремах 5 и 6 настоящей работы. Предложения этого типа интересны в том отношении, что вывод о сходимости разложения делается на основании условий не топологического характера.

1. Терминология и предварительные результаты

Пусть X линейно топологическое локально выпуклое пространство, X^* сильно сопряженное к нему ([8], Fascicule de résultats, § 6, 13), Γ подмножество X^*.

Если (x_n) последовательность элементов из X, то символ $x_n \underset{\Gamma}{\to} x_0$ обозначает, что $\lim\limits_n x^* x_n = x^* x_0$ для любого $x^* \in \Gamma$.

Полунорма $|\cdot|$ (¹) на X, удовлетворяющая условию

(K_1) если $x_n \underset{\Gamma}{\to} x_0$, то $\varliminf\limits_n |x_n| \geqslant |x_0|$

называется *согласованной* с Γ.

Система полунорм $(|\cdot|_a)_{a\in\mathfrak{A}}$ на X называется *полной*, если множества

$$V_{\varepsilon,a} = \{x \in X\colon |x|_a < \varepsilon\} \quad (a \in \mathfrak{A},\ \varepsilon > 0)$$

образуют базис окрестностей нуля в X.

Множество $\Gamma \subset X^*$ назовём *нормирующим* для X (соотв. для подпространства $X^1 \subset X$), если система полунорм $(|x|_{B_a \cap \Gamma})_{a\in\mathfrak{A}}$ полна в X

(¹) *Полунорма* — непрерывный, неотрицательный, субаддитивный и положительно однородный функционал.

(соотв. в X^1) для каждой (или, что эквивалентно, хотя бы для одной) фундаментальной [2] системы $(B_a)_{a\in\mathfrak{A}}$ симметричных выпуклых ограниченных множеств в X^*, где

$$|x|_{B_a\cap\Gamma} = \begin{cases} \sup\limits_{x^*\in B_a\cap\Gamma} |x^*x| & \text{если множество } B_a\cap\Gamma \text{ не пусто,} \\ 0 & \text{если } B_a\cap\Gamma = 0. \end{cases} \qquad (x\in X, a\in\mathfrak{A})$$

Последовательность полунорм $(|\cdot|_n)$ называется *возрастающей*, если $|x|_n \leqslant |x|_{n+1}$ для всех $x\in X$ $(n = 1, 2, \ldots,)$.

Предложение 1. *Пусть X локально выпуклое бочечное* [3] *пространство; $(|\cdot|_\beta)_{\beta\in\mathfrak{X}}$ полная (возрастающая) система полунорм в X такая, что нормированные пространства $(X, |\cdot|_\beta)$* [4] *сепарабельные для всех $\beta\in\mathfrak{X}$ (вчастности, X сепарабельное F-пространство* [5]*). Пусть Γ нормирующее множество для X. Тогда в X существует полная возрастающая система полунорм $(|||\cdot|||_a)_{a\in\mathfrak{A}}$, такая, что*

(K_1) *если $x_p \underset{\Gamma}{\to} x_0$, то $\varliminf\limits_p |||x_p|||_a \geqslant |||x_0|||_a$ $(a\in\mathfrak{A})$,*

(K_2) *если $x_p \underset{\Gamma}{\to} x_0$ и $\lim\limits_p |||x_p|||_a = |||x_0|||_a$ для какого нибудь a, то $\lim\limits_p |||x_p - x_0|||_a = 0$ для того же a.*

Доказательство основано на следующей лемме:

Лемма 1. *Пусть E сепарабельное нормированное пространство; Σ — подмножество единичного шара сопряжённого пространства E^*. Пусть $\|\cdot\|$ — полунорма на E определенна следующим образом:*

$$\|x\| = \begin{cases} \sup\limits_{x^*\in\Sigma} |x^*x| & \textit{если } \Sigma \textit{ не пусто,} \\ 0 & \textit{если } \Sigma \textit{ пустое множество.} \end{cases} \qquad (x\in X)$$

Тогда на E существует полунорма $|||\cdot|||$ обладающая следующими свойствами:

---

[2] Напомним (см. [8], Fascicule de résultats, § 1, 10), что подмножество B линейного топологического пространства X называется *ограниченным*, если для каждой окрестности нуля в $X - V$ существует $t > 0$ такое, что $tB \subset V$. Система $(B_a)_{a\in\mathfrak{A}}$ ограниченных множеств называется *фундаментальной* в X, если каждое ограниченное множество в X содержится в некотором множестве этой системы.

[3] По поводу определения бочечного пространства см. [8], Fascicule de résultats, § 7.

[4] Под $(X, |\,|_a)$ понимаем фактор-пространство X/X_0^a с нормой $\inf\limits_{y\in X_0^a} |x+y|_a$, где $X_0^a = \{x\in X\colon |x|_a = 0\}$.

[5] *F-пространство* — локально-выпуклое, метризуемое полное пространство (= пространство Фреше).

$(\overline{K}_0)$ *соотношения $\lim\limits_p \|x_p - x_0\| = 0$ и $\lim\limits_p |||x_p - x_0||| = 0$ эквивалентные для каждой последовательности (x_p) в E;*

$(\overline{K}_1)$ *если $x_p \underset{\Sigma}{\to} x_0$, то $\varliminf\limits_p |||x_p||| \geqslant |||x_0|||$;*

$(\overline{K}_2)$ *если $x_p \underset{\Sigma}{\to} x_0$ и $\lim\limits_p |||x_p||| = ||||x_0|||$, то $\lim\limits_p ||||x_p - x_0||| = 0$.*

Доказательство леммы. Если Σ пустое множество, полагаем $|||x||| = 0$ для псех $x\in X$.

Пуст теперь Σ не пусто. Так как E сепарабельно, то единичный шар E^* является компактным метризуемым пространством в слабой топологии сопряженного пространства $\sigma(E^*, E)$. Пусть $\varrho(f, g)$ метрика на единичном шаре E^*, индуцированная этой топологией. Положим для любого $x\in E$

(1) $$\omega_0(x) = \|x\| = \sup_{f\in\Sigma} |f(x)|, \qquad \omega_k(x) = \sup_{\substack{f,g\in\Sigma \\ \varrho(f,g)\leqslant 1/k}} |f(x) - g(x)|,$$

(2) $$|||x||| = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\omega_k(x).$$

Очевидно, $(\overline{K}_0)$ выполнено, так как $\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant 3\|x\|$. Далее, легко проверить, что

(3) $$\text{если } x_n \underset{\Sigma}{\to} x_0, \text{ то } \varliminf_n \omega_k(x_n) \geqslant \omega_k(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда непосредственно следует $(\overline{K}_1)$. Проверим $(\overline{K}_2)$. Пусть (x_n) последовательность элементов пространства E такая, что

(4) $$x_n \underset{\Sigma}{\to} x_0 \quad \text{и} \quad \lim_n |||x_n||| = |||x_0|||.$$

Из (3) и (4) следует, что

(5) $$\lim_n \omega_k(x_n) = \omega_k(x_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Элементы пространства E можно рассматривать как равномерно непрерывные функции на Σ (при этом, вообще говоря, разным элементам может соответствовать одна и та же функция). Из (1), (4) и (5) следует, что последовательности (x_n) соответствует ограниченная последовательность равностепенно непрерывных функций, сходящаяся в каждой точке $f\in\Sigma$ к $f(x_0)$. Отсюда, в силу теоремы Арцела, $\lim\limits_n \|x_n - x_0\| = 0$, а согласно $(\overline{K}_0)$ и $\lim\limits_n |||x_n - x_0||| = 0$.

Доказательство предложения 1. Пусть $\mathfrak{A}$ множество всех пар $a = (\beta, n)$; $\beta\in\mathfrak{X}$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $\|x\|_a = n|x|_\beta$ $(x\in X)$ и $B_a = \{x^*\in X^*\colon \sup\limits_{\|x\|_a\leqslant 1} |x^*x| \leqslant 1\}$ для $a = (\beta, n)\in\mathfrak{A}$. Заметим, что если X бочечное пространство, то $(B_a)_{a\in\mathfrak{A}}$ является фундаментальной системой выпуклых ограниченных симетричных множеств в X^*. Действительно, если A произвольное ограниченное множество в X^*, то $A_0 = \{x \in X: \sup_{x^* \in A} |x^* x| \leqslant 1\}$ является бочкой в X. В силу бочечности пространства X отсюда следует, что A_0 содержит некоторую окрестность нуля пространства X. Но так как система полунорм $(|\cdot|_\beta)_{\beta \in \mathfrak{X}}$ полна в X, то множества $\{x \in X: |x|_\beta < n^{-1}\}$ $(\beta \in \mathfrak{X}, n = 1, 2, \ldots)$ образуют базис окрестностей нуля в X. Значит, существует $\alpha_0 = (\beta_0, n_0)$ такое что $\{x \in X: |x|_{\beta_0} < n_0^{-1}\} \subset A_0$. Отсюда следует что $B_{\alpha_0} \supset A$.

Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}$. Используем лемму I для случая $E = E_\alpha = (X, \|\cdot\|_\alpha)$; $\Sigma = B_\alpha \cap \Gamma$. Пусть $|||\cdot|||_{E_\alpha}$ непрерывная полунорма на E_α, удовлетворяющая условиям $(\overline{K}_0), (\overline{K}_1)$ и $(\overline{K}_2)$. Для каждого $x \in X$ положим $|||x|||_\alpha = |||[x]|||_{E_\alpha}$, где

$$[x] = \{y \in X: |x-y|_\alpha = 0\} \in E_\alpha.$$

Согласно $(\overline{K}_1)$ и $(\overline{K}_2)$, построенная система полунорм $(|||\cdot|||_\alpha)$ удовлетворяет условиям (K_1) и (K_2). Далее, в силу $(\overline{K}_0)$ каждая полунорма $|||x|||_\alpha$ эквивалентна полунорме $\|x\|_\alpha = \sup_{x^* \in B_\alpha \cap \Gamma} |x^* x|$. Так как Γ нормирующее множество и $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ фундаментальная система ограниченных симметричных множеств в X^*, то система полунорм $(|||\cdot|||_\alpha)$ оказывается полной в X. Если предположить еще, что X — метризуемое пространство, то можно считать, что индексы α пробегают множество всех натуральных чисел. В этом случае можно получить возрастающую систему полунорм, удовлетворяющую предыдущим требованиям, положив

$$|||\cdot|||_k' = \sum_{i=1}^{k} |||\cdot|||_i \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

что требовалось доказать.

Последовательность (x_n) элементов F-пространства X называется *базисом*, если каждый элемент x из X однозначно представляется в виде $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$. Последовательность (y_n) элементов X называется *базисной*, если она является базисом в замыкании своей линейной оболочки. Так же как и для пространств типа B имеет место

Предложение 2 (см. [4], стр. 126). *Для того, чтобы последовательность (y_n) отличных от нуля элементов F-пространства X была базисной, необходимо и достаточно, чтобы существовала полная возрастающая последовательность полунорм $(|\cdot|_m)$ и константы $C_m > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такие, что*

$$(*) \qquad \Big|\sum_{i=1}^{p} t_i y_i\Big|_m \leqslant C_m \Big|\sum_{i=1}^{q} t_i y_i\Big|_m$$

для произвольных скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_q$ $(1 \leqslant p < q < \infty)$.

Достаточность. Пусть Y_0 линейная оболочка, натянутая на элементы y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и Y замыкание Y_0 в X. Из условия $(*)$ следует, что элементы $y_1, y_2, \ldots$ линейно независимы. Действительно, в противном случае должны существовать скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_k$, такие, что $\sum_{i=1}^{k} t_i y_i + y_{k+1} = 0$. Тогда

$$\|y_{k+1}\|_m = \Big\|\sum_{i=1}^{k} t_i y_i\Big\|_m \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{k} t_i y_i + y_{k+1}\Big\|_m \cdot C_m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

значит $y_{k+1} = 0$, что невозможно. Линейная независимость элементов $y_1, y_2, \ldots$ влечет за собой, что каждое $z \in Y_0$ однозначно представимо в виде $z = \sum_{i=1}^{N(z)} t_i y_i$. Положим

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} t_i & \text{для} \quad i \leqslant N(z) \\ 0 & \text{для} \quad i > N(z) \end{cases}.$$

Из условия $(*)$ вытекает, что $|\varphi_i(z)| \leqslant 2|z|_m |y_i|_m^{-1} C_m$ для любого m такого, что $|y_i|_m \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Значит $\varphi_i(\cdot)$ продолжаются до линейных функционалов на все Y. Обозначим эти продолжения соответственно через y_i^* $(i = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$P_n y = \sum_{i=1}^{n} (y_i^* y) y_i.$$

Очевидно, что (P_n) последовательность конечномерных линейных операторов, сходящихся к тождественному оператору на всюду плотном множестве Y_0 в Y. Кроме того из $(*)$ следует, что $|P_n y|_m \leqslant C_m |y|_m$ для $y \in Y_0$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$. Но так как Y_0 плотно в Y, и P_n непрерывные операторы, то $|P_n y|_m \leqslant C_m |y|_m$ для $y \in Y$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$. Отсюда по теореме Банаха-Штейнгауза имеем

$$\lim_n P_n y = \sum_{i=1}^{\infty} (y_i^* y) y_i = y$$

для $y \in Y$. Кроме того

$$|P_n y|_m \leqslant \lim_r C_m |P_{n+r} y|_m = C_m |y|_m$$

для $y \in Y$ $(m = 1, 2, \ldots)$, откуда следует однозначность представления

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} t_i y_i.$$

Необходимость. Пусть (y_k) — базис в подпространстве $Y \subset X$. Определим на Y полунормы $|\cdot|_m$ по формуле

$$|y|_m = \sup_r \Big\|\sum_{i=1}^{r} t_i y_i\Big\|_m, \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} t_i y_i \in Y$$

для $m = 1, 2, \ldots$, где $(\|\cdot\|_m)$ произвольная возрастающая полная система полунорм на X. Аналогично тому, как это сделано в [10], стр. 68, можно показать, что последовательность $(|\ |_m)$ является полной возрастающей системой полунорм на Y, удовлетворяющей условию $(*)$ с константами $C_m = 1$, значит

$$|y|_m = \sup_r \Big|\sum_{i=1}^{r} (y_i^* y) y_i\Big|_m \quad \text{для} \quad y \in Y \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство завершает следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть X — F-пространство, Y его замкнутое подпространство и $(|\cdot|_m)$ полная (возрастающая) система полунорм на Y. Тогда существует (возрастающая) система полунорм $(\widetilde{|\cdot|}_m)$ на X таких, что $\widetilde{|y|}_m = |y|_m$ для $y \in Y$, $m = 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Из предположений леммы следует, что существует полная возрастающая система $(\|\ \|_m)$ на X и константы $C_m > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такие, что $|y|_m \leqslant C_m \|y\|_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Такую систему можно выделить из любой полной возрастающей системы полунорм на X, используя тот факт, что для любой полунормы $|\cdot|$ на локально выпуклом линейно метрическом пространстве E в любой полной возрастающей системе полунорм $\|\ \|_m$ на E, существует индекс m_0 и константа $C > 0$, такие что $|e| \leqslant C\|e\|_{m_0}$ для $e \in E$. Положим

$$V_m = \operatorname{conv}\left(\{y \in Y\colon |y|_m \leqslant 1\} \cup \left\{x \in X\colon \|x\|_m \leqslant \frac{1}{C_m}\right\}\right),$$

$$\widetilde{|x|}_m = \inf\left\{t\colon \frac{x}{t} \in V_m \ \text{и} \ t > 0\right\}.$$

Легко проверить, что так определенная система полунорм удовлетворяет условиям леммы.

Последовательность $(x_n; x_n^*)$ элементов из X и функционалов из X^* называется *биортогональной системой*, если

$$x_n^* x_m = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq m \\ 1 & \text{при} \quad n = m. \end{cases}$$

Символ $x \sim \sum_n t_n x_n$ обозначает, что $x_n^*(x) = t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Биортогональная система называется *нормирующей*, если множество Γ всех линейных комбинаций элементов x_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$ является нормирующим. Заметим, что всякая нормирующая биортогональная система *тотальна*, т. е., если $x_n^* x = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$ то $x = 0$.

Тотальная биортогональная система называется *базисом со скобками*, если существует последовательность индексов $1 = n_0 < n_1 < < n_2 < \ldots$, такая что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_{k-1}}^{n_k - 1} (x_k^* x) x_k = x \quad \text{для} \quad x \in X.$$

Замечание 1. Можно дать другое определение базиса со скобками (см. [13], [14]). Именно, последовательность (x_n) элементов X называется базисом со скобками, если существует последовательность индексов такая, что $1 = n_0 < n_1 < \ldots$ и любой элемент x из X единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_{k-1}}^{n_k - 1} t_k x_k.$$

Аналогичным образом, как для обыкновенных базисов (см. [10], стр. 67) можно доказать, исходя из этого определения, что коэффициенты $t_n(x) = t_n$ являются линейными функционалами, значит, это определение по существу совпадает с предыдущим. Более полное обобщение теоремы Банаха о том, что коэффициенты разложения по базису являются линейными функционалами было дано Мазуром на семинаре по функциональному анализу в 1955 г. в Варшаве и независимо Мэк Артуром [34] и Сандерсом [44].

(M) *Пусть X — F-пространство; $X_1, X_2, \ldots$ последовательность его подпространств такая, что любое x из X единственным образом представимо в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

где $x_k \in X_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда оператор $T_k\colon X \to X_k$, определенный равенством $T_k x = x_k$, является линейным проектором.

Пусть X локально выпуклое пространство; $\Xi = (x_n, x_n^*)$ биортогональная система в нем. Совокупность числовых последовательностей $\gamma = (\gamma_i)_1^\infty$ назовем *мультипликатором элемента* $x \in X$ и обозначим через $M(x, \Xi)$, если для каждой последовательности $\{\gamma_i\} \in M(x, \Xi)$ найдется элемент x_γ такой, что $(x_n^*, x_\gamma) = \gamma_n (x_n^*, x)$, $n = 1, 2, \ldots$

2. Теоремы о выборе базисной последовательности

Предложение 3. *Пусть X локально выпуклое линейно-топологическое пространство, $\Gamma \subset X^*$ и $|\cdot|$ — полунорма на X, согласованная с Γ. Пусть (x_n) последовательность элементов из X, удовлетворяющая одному из условий*

(i) $x_n \underset{\Gamma}{\to} 0$ и $\inf_n |x_n| \geqslant \delta > 0$,

(ii) $\lambda_n x_n \underset{\Gamma}{\to} 0$ *для каждой последовательности скаляров* (λ_n).

Тогда

$$\liminf_{n}\inf_{\lambda} |e+\lambda x_n| = |e| \quad \text{для любого} \quad e\in X.$$

Доказательство. Случай (i). Пусть λ_n такое, что $|e+\lambda_n x_n| = \inf_\lambda |e+\lambda x_n|$. Тогда $|\lambda_n| \leqslant 2|e|/\delta$ в силу (i), откуда следует, что $\lambda_n x_n \underset{\Gamma}{\to} 0$. Отсюда в силу (K_1) имеем

$$|e| = \lim_n |e+0\cdot x_n| \geqslant \overline{\lim_n}\inf_\lambda |e+\lambda x_n| \geqslant \underline{\lim_n}\inf_\lambda |e+\lambda x_n| = \underline{\lim_n} |e+\lambda_n x_n| \geqslant |e|,$$

значит $|e| = \liminf_{n}\inf_{\lambda} |e+\lambda x_n|$.

Случай (ii). Пусть n' последовательность тех индексов, для которых $|x_{n'}| = 0$ и n'' последовательность остальных индексов. Очевидно, что

$$\liminf_{n'}\inf_{\lambda} |e+\lambda x_{n'}| = |e|.$$

В силу рассмотренного выше случая (i) имеем

$$\liminf_{n''}\inf_{\lambda} |e+\lambda x_{n''}| = \liminf_{n''}\inf_{\eta} \left|e+\eta \frac{x_{n''}}{|x_{n''}|}\right| = |e|,$$

где $\eta = \lambda |x_{n''}|$.

Теорема 1. *Пусть X-сепарабельное F-пространство, $\Gamma \subset X^*$ — нормирующие множество для X и пусть (x_n) последовательность элементов из X, удовлетворяющая одному из условий:*

(i') $x_n \underset{\Gamma}{\to} 0$, *но* (x_n) *не стремится к нулю в исходной топологии пространства* X,

(ii') $\lambda_n x_n \underset{\Gamma}{\to} 0$ *для каждой последовательности скаляров* (λ_n), *но* $x_n \neq 0$ *для бесконечного числа индексов* n.

Тогда из последовательности (x_n) можно выделить бесконечную базисную последовательность.

Лемма 3. *Пусть X линейное метрическое локально выпуклое пространство, пусть $\Gamma \subset X^*$ нормирующее множество, пусть $(|\cdot|_m)$ возрастающая последовательность полунорм на X, согласованных с Γ и пусть (x_n) последовательность элементов из X, такая что*

$$x_n \underset{\Gamma}{\to} 0, \tag{6}$$

$$|x_n|_m \geqslant |x_n|_1 = 1 \quad (m, n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Тогда для любого конечномерного подпространства $E \subset X$, $\varepsilon > 0$ и любого индекса m существует индекс $N(E, \varepsilon, m)$, такой что для $n \geqslant N(E, \varepsilon, m)$

$$|e+tx_n|_k > (1-\varepsilon)|e|_k \tag{8}$$

для $e\in E$ и произвольного скаляра t $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Пусть $S_E^k = \{e\in E\colon |e|_k = 1\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Так как E конечномерно, то множество S_E^k компактно относительно метрики индуцированной полунормой $|\ |_k$. Пусть $e_1^k, e_2^k, \ldots, e_{w_k}^k$ $\varepsilon/2$-сеть для S_E^k относительно этой метрики. В силу предложения 3 существует индекс $N = N(E, \varepsilon, m)$, такой что для $n \geqslant N$

$$\inf_\lambda |e_i^k+\lambda x_n|_k > \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)|e_i^k|_k \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant w_k;\ 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{9}$$

Пусть $k \leqslant m$ произвольный, но фиксированный индекс. Пусть $|e|_k = 1$. Выберем e_i^k так, чтобы $|e-e_i^k|_k < \varepsilon/2$. В силу (9) имеем для $n \geqslant N$

$$|e+\lambda x_n|_k \geqslant |e_i^k+\lambda x_n|_k - |e_i^k - e|_k > \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)|e_i^k|_k - \frac{\varepsilon}{2} = (1-\varepsilon)|e|_k.$$

Отсюда в силу однородности полунорм $|\ |_k$ и произвольности выбора $e\in S_E^k$ следует (8).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай (i'). Без уменьшения общности можно считать, что последовательность (x_n) такова, что вместе с некоторой полной возрастающей последовательностью полунорм $(|\cdot|_m)$ удовлетворяет условиям (6) и (7) леммы 3. Действительно, пусть $(|\ |_m')$ любая полная возрастающая система полунорм на X, согласованных с Γ (такая существует в силу предположения 1). Так как (x_n) не стремится к нулю в исходной топологии X, то существует индекс m_0 и подпоследовательность (n_k), такие что $\inf_k |x_{n_k}|_{m_0} = \delta > 0$. Положим $|\cdot|_m = |\cdot|_{m_0+m-1}'$ $(m = 1, 2, \ldots)$, а последовательность (x_n) заменим последовательностью (r_k), где $r_k = x_{n_k}/|x_{n_k}|_{m_0}$. Такая замена возможна, так как мы можем всегда заменить последовательность ее бесконечной подпоследовательностью, а умножение базисной последовательности на числа отличные от нуля приводят снова к базисной последовательности.

Используя лемму 3, определим по индукции для произвольной последовательности чисел (ε_m), удовлетворяющей условию $0 < \varepsilon_m < 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$, последовательность индексов $1 = n_1 < n_2 < \ldots$ такую, что

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} t_i x_{n_i}\Big|_k > (1-\varepsilon_m)\Big|\sum_{i=1}^{m-1} t_i x_{n_i}\Big|_k \tag{10}$$

для произвольных скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(k = 1, 2, \ldots, m;\ m = 1, 2, \ldots)$. (Полагаем $n_1 = 1$, $n_m = N(E_{m-1}, \varepsilon_m, m)$, где E_{m-1} пространство натянутое на элементы $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{m-1}}$, $m = 2, 3, \ldots$).

Пусть $0 < \delta < 1$. Выберем последовательность (ε_m), так чтобы

$$\inf_{1 \leqslant p \leqslant q < +\infty} \prod_{m=p}^{q} (1 - \varepsilon_m) > 1 - \delta. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует

$$\Big|\sum_{i=m}^{q} t_i x_{n_i}\Big|_m \geqslant \prod_{r=p+1}^{q} (1-\varepsilon_r) \cdot \Big|\sum_{i=m}^{p} t_i x_{n_i}\Big|_m > (1-\delta)\Big|\sum_{i=m}^{p} t_i x_{n_i}\Big|_m \tag{12}$$

для произвольных скаляров $t_1, \ldots, t_p$ и $m \leqslant p < q < \infty$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Обозначим через Y_0 линейную оболочку элементов $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ Так как $|x_i|_1 = 1 \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то из условия (12) для $m = 1$ следует так же как в доказательстве предложения 2, что элементы $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ линейно независимы. Для

$$z = \sum_{i=1}^{N(z)} t_i x_{n_i} \in Y_0$$

положим

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} t_i & \text{для} \quad i \leqslant N(z), \\ 0 & \text{для} \quad i > N(z). \end{cases}$$

Так же как в доказательстве предложения 2, из (12) и равенства $|x_{n_i}|_1 = 1$ следует оценка

$$|\varphi_i(z)| < \frac{2}{1-\delta} |z|_1 \quad \text{для} \quad z \in Y_0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $1 \leqslant p < q < \infty$; $t_1, t_2, \ldots, t_q$ — произвольные скаляры и m фиксированный индекс.

Положим

$$z = \sum_{i=1}^{q} t_i x_{n_i}.$$

Рассмотрим два случая

(A) $p < m$; тогда

$$\Big|\sum_{i=1}^{p} t_i x_{n_i}\Big|_m = \Big|\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(z) x_{n_i}\Big|_m \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} |\varphi_i(z)| \cdot |x_{n_i}|_m \leqslant \tag{13}$$

$$\leqslant \Big(\frac{2}{1-\delta} \sum_{i=1}^{m-1} |x_{n_i}|_m\Big) |z|_1 \leqslant \frac{2}{1-\delta} \sum_{i=1}^{m-1} |x_{n_i}|_m |z|_m$$

(B) $p \geqslant m$; тогда в силу (12)

$$\Big|\sum_{i=1}^{p} t_i x_{n_i}\Big|_m \leqslant \Big|\sum_{i=m}^{p} t_i x_{n_i}\Big|_m + \Big|\sum_{i=1}^{m-1} t_i x_{n_i}\Big|_m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\delta}\Big|\sum_{i=m}^{q} t_i x_{n_i}\Big|_m + \Big|\sum_{i=1}^{m-1} t_i x_{n_i}\Big|_m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\delta}\Big|\sum_{i=1}^{q} t_i x_{n_i}\Big| + \Big(\frac{1}{1-\delta} + 1\Big)\Big|\sum_{i=1}^{m-1} t_i x_{n_i}\Big|_m \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\frac{1}{1-\delta} + \Big(\frac{1}{1-\delta} + 1\Big) \cdot \frac{2}{1-\delta} \sum_{i=1}^{m-1} |x_{n_i}|_m\Big] \cdot |z|_m.$$

Значит система (x_{n_i}) ненулевых векторов удовлетворяет условию $(*)$ предложения 2.

Рассмотрим теперь случай (ii'). Тогда или 1° для каждой полунормы $\|\cdot\|$ на X множество $\{n\colon \|x_n\| \neq 0\}$ конечно, или 2° для некоторой полунормы $\|\ \|_0$ на X множество $\{n\colon \|x_n\|_0 \neq 0\}$ бесконечно. В случае 1° в силу конструкции проведенной в [5] из последовательности (x_n) можно выделить базисную подпоследовательность, эквивалентную базису единичных векторов пространства s (R^N в терминологии [8]). Случай 2° сводится к (i'). Действительно, достаточно рассмотреть последовательность $z_n = x_{n''}/\|x_{n''}\|_0$, где n'' последовательность тех индексов, для которых $\|x_{n''}\|_0 \neq 0$.

Следствие 1. *Пусть X — F-пространство. Для того, чтобы из ненулевой последовательности (x_n) элементов X можно было выделить базисную подпоследовательность, необходимо и достаточно, чтобы существовало нормирующее множество $\Gamma \subset X^*$ и последовательность индексов (n_k), такие что $\lambda_k x_{n_k} \xrightarrow[\Gamma]{} 0$ для любой скалярной последовательности (λ_k).*

Доказательство. Достаточность непосредственно вытекает из теоремы 1.

Необходимость. Пусть (y_n) подпоследовательность последовательности (x_n), образующая базис в подпространстве $Y \subset X$, пусть $(y_n; y_n^*)$ биортогональная система, индуцированная базисом (y_n); $y_n^* \in Y^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Заметим прежде всего, что линейная оболочка Γ_Y элементов y_n^* образует нормирующие множество в Y. Для этого в силу предложения 2 (доказательство необходимости) выберем в X полную возрастающую систему полунорм такую, что

$$\sup_n \Big|\sum_{i=1}^{n} (y_i^* y) y_i\Big|_m = |y|_m \quad \text{для} \quad y \in Y \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Положим для $m = 1, 2, \ldots$

$$B_m^X = \{x^* \in X^*: \sup_{|x|_m \leqslant 1} |x^* x| \leqslant 1\},$$

$$B_m^Y = \{y^* \in Y^*: \sup_{|y|_m \leqslant 1} |y^* y| \leqslant 1\}.$$

Очевидно, что множества (nB_m^X) (соответственно (nB_m^Y)) образуют фундаментальную систему ограниченных множеств в X^* (соответственно Y^*) $n, m = 1, 2, \ldots$ Так как

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} (y_i^* y) y_i$$

для $y \in Y$, то

$$\sup_{y^* \in B_m^Y \cap \Gamma_Y} |y^* y| = \sup_{y^* \in B_m^Y \cap \Gamma_Y} \sup_n \Big| y^* \Big(\sum_{i=1}^{n} (y_i^* y) y_i \Big) \Big| =$$

$$= \sup_n \sup_{y^* \in B_m^Y} \Big| y^* \Big(\sum_{i=1}^{n} (y_i^* y) y_i \Big) \Big| = \sup_n \Big| \sum_{i=1}^{n} (y_i^* y) y_i \Big|_m = |y|_m.$$

Но как известно (см. доказательство необходимости в предложении 2), система $(|\cdot|_m)$ полная и возрастающая. Обозначим через $\Gamma_X^{(m)}$ множество всех возможных расширений функционалов из $\Gamma_Y \cap B_m^Y$ до функционалов из B_m^X и положим $\Gamma_X = \bigcup_m \Gamma_X^{(m)}$ и $\Gamma = \Gamma_X \cup Y^\perp$, где $Y^\perp = \{x^* \in X^*: x^* y = 0$ для $y \in Y\}$.

Покажем, что Γ нормирующее множество. Пусть m фиксированный индекс и $x \in X$. Рассмотрим два случая.

1° Существует $y \in Y$, такое что $|x - y|_m < \frac{1}{4}|x|_m$. Тогда возьмем $x^* \in \Gamma_X^{(m)} \subset B_m^X$, являющееся продолжением $y^* \in \Gamma_Y \cap B_m^Y$ такого, что $|y^* y| > \frac{3}{4}|y|_m$ (такое y^* существует, так как выше показано, что

$$\sup_{y^* \in \Gamma_Y \cap B_m^Y} y^* y = |y|_m;$$

существование продолжения x^* обеспечивает теорема Хана-Банаха). Так как $x^* \in B_m^X$, то $|x^* z| \leqslant |z|_m$ для каждого $z \in X$, отсюда

$$|x^* x| \geqslant |x^* y| - |x^*(x - y)| \geqslant \tfrac{3}{4}|y|_m - \tfrac{1}{4}|x|_m.$$

Но

$$|y|_m \geqslant |x|_m - |x - y|_m \geqslant \tfrac{3}{4}|x|_m,$$

и окончательно

$$|x^* x| \geqslant (\tfrac{3}{4})^2 |x|_m - (\tfrac{1}{4})|x|_m \geqslant \tfrac{1}{4}|x|_m.$$

2° $\inf_{y \in Y} |x - y|_m \geqslant \frac{1}{4}|x|_m$. Тогда в силу теоремы Хана-Банаха существует $x^* \in B_m^X \cap Y^\perp$ такой, что $|x^* x| \geqslant \frac{1}{4}|x|_m$. Значит

$$\sup_{x^* \in \Gamma \cap B_m^X} |x^* x| \geqslant \tfrac{1}{4}|x|_m \quad \text{для} \quad x \in X,\ m = 1, 2, \ldots,$$

что в сопоставлении с очевидным неравенством

$$\sup_{x^* \in \Gamma \cap B_m^X} |x^* x| \leqslant \sup_{x^* \in B_m^X} |x^* x| = |x|_m$$

дает, что Γ является нормирующим множеством. Так как из построения Γ довольно очевидно, что $\lambda_n y_n \underset{\Gamma}{\to} 0$ для произвольной последовательности скаляров λ_n, то следствие 1 доказано.

Замечание 2. Оговорим коротко другой метод доказательства теоремы 1, предложенный Ч. Бэссагой. Для простоты ограничимся случаем, когда X банаховое пространство и выполнено условие (i′). Тогда, если $\Gamma \subset X^*$ строго нормирующие множество для X, т. е.

$$\sup_{0 \neq x^* \in \Gamma} \frac{|x^* x|}{\|x^*\|} = \|x\|$$

для $x \in X$, где $\|\cdot\|$ исходная норма в X, то конструкцию базисной последовательности можно провести методом Мазура (см. [40]). Если же Γ произвольное нормирующие множество, то достаточно применить следующую лемму:

Лемма [6]. *Пусть X банаховое пространство, $\Gamma \subset X^*$ нормирующее множество для X. Положим*

$$\|x\|_\Gamma = \sup_{0 \neq x^* \in \Gamma} \frac{|x^* x|}{\|x^*\|} \qquad (x \in X).$$

Тогда норма $\|\cdot\|_\Gamma$, эквивалентная исходной норме $\|\cdot\|$ в X и Γ относительно нормы $\|\cdot\|_\Gamma$, является строго нормирующим множеством, т. е.

$$\|x\|_{\Gamma\Gamma} = \sup_{0 \neq x^* \in \Gamma} \frac{|x^* x|}{\|x^*\|_\Gamma} = \|x\|_\Gamma$$

для $x \in X$, где $\|x^*\|_\Gamma = \sup_{\|x\|_\Gamma \leqslant 1} |x^* x| \qquad (x \in X).$

Доказательство. Так как $\|x\|_\Gamma \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$, то $\|x^*\|_\Gamma \geqslant \|x^*\|$ для $x^* \in X^*$. Фиксируя $0 \neq x^* \in \Gamma$ для произвольного $x \in X$, получаем

$$\frac{|x^* x|}{\|x^*\|} \leqslant \sup_{z^* \in \Gamma} \frac{z^* x}{\|z^*\|} = \|x\|_\Gamma,$$

[6] Эта лемма принадлежит Диксимье (J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math. J. 15 (1948), стр. 1057-1071). На возможность применения этой леммы для доказательства теоремы 1 обратил тоже внимание авторов И. Зингер.

откуда

$$\|x^*\|_\Gamma = \sup_{\|x\|_\Gamma \leqslant 1} |x^*x| \leqslant \|x^*\|.$$

Значит $\|x^*\|_\Gamma = \|x^*\|$ для $0 \neq x^* \in \Gamma$. Отсюда очевидно $\|x\|_{\Gamma\Gamma} = \|x\|_\Gamma$ для всех x в X.

По поводу ещё одного метода получения Теоремы 1 см. замечание 6.

Теорема 2. *Пусть X — F-пространство, (x_n) — ограниченная последовательность в X, не обладающая предельной точкой в сильной топологии. Для того, чтобы из последовательности (x_n) можно было выделить бесконечную базисную последовательность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

а) *слабое замыкание в X множества элементов последовательности (x_n) не слабо-компактно,*

б) *нуль-слабая предельная точка последовательности (x_n).*

Лемма 4. *Пусть X F-пространство, X^{**} второе сопряжённое к X и X^1 сепарабельное подпространство X^{**}. Тогда существует счётное множество $\Gamma \subset X^*$, которое нормирующее для X^1 (мы считаем X^* канонически вложенным в X^{***}).*

Доказательство. Полная возрастающая система $(|\cdot|_k)$ полунорм в X индуцирует полную возрастающую систему полунорм в X^{**}, которую также обозначим через $(|\ |_k)$. Если $S_k = \{x \in X: |x|_k \leqslant 1\}$ и $S_k^* = \{x^* \in X^*: \sup_{x \in S_k} |x^*x| \leqslant 1\}$, то

$$|x^{**}|_k = \sup_{x^* \in S_k^*} |x^{**}x^*|$$

для каждого $x^{**} \in X^{**}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Пусть $S_k^{**} = \{x^{**} \in X^{**}: |x^{**}|_k \leqslant 1\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Если X^1 сепарабельное подпространство X^{**}, то существует $x_{nk}^{**} \in S_k^{**} \cap X^1$ такое, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_{nk}^{**}\}$ всюду плотное в $S_k^{**} \cap X^1$ для $k = 1, 2, \ldots$ Для фиксированного x_{nk}^{**} и для $l = 1, 2, \ldots$ подберём функционалы $x_{nkl}^* \in S_k^*$ такие, что

$$x_{nk}^{**} x_{nkl}^* > |x_{nk}^{**}|_k - \frac{1}{l}.$$

Положим

$$\Gamma = \bigcup_l \bigcup_k \bigcup_n \{x_{nkl}^*\}.$$

Легко проверить, что Γ искомое нормирующее множество для X^1 и при этом $|x^{**}|_{\Gamma \cap S_k^*} = |x^{**}|_k$ для $x^{**} \in X^1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть (x_{n_k}) — базисная последовательность, выделенная из последовательности (x_n). Если слабое замыкание множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ слабо-компактно, то в силу теоремы Эберлейна-Шмульяна [11], стр. 430, без потери общности можно считать, что (x_{n_k}) слабо сходится к некоторому элементу x_0 в X. В силу [11], стр. 422, x_0 принадлежит замыканию линейной оболочки, натянутой на элементы базисной последовательности (x_{n_k}). Отсюда следует, что

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_0) x_{n_k}$$

где (x_{n_k}, x_k^*) — биортогональная система. Но,

$$x_p^*(x_0) = \lim_k x_p^*(x_{n_k}) = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Значит $x_0 = 0$.

Достаточность. Без потери общности можно считать, что пространство X сепарабельно. Рассмотрим сначала случай а. В этом случае существует элемент $x^{**} \in X^{**} \setminus X$, который является предельной точкой в $\sigma(X^{**}, X^*)$ топологии для множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ (считаем X канонически вложенным в X^{**}). Пусть X^1 линейная оболочка x^{**} и X. Всилу леммы 4 существует счётное множество

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{x_m^*\} = \Gamma \subset X^*,$$

которое является нормирующим для X^1. Согласно определению x^{**}, для $k = 1, 2, \ldots$ найдётся индекс n_k такой, что $|x^{**}x_m^* - x_m^* x_{n_k}| < 1/k$ для $m = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что $x_{n_k} \xrightarrow[\Gamma]{} x^{**}$. Так как $x_{n_k} - x^{**} \xrightarrow[\Gamma]{} 0$ то по теореме 1 из последовательности $(x_{n_k} - x^{**})$ можно выделить подпоследовательность $(z_\nu - x^{**})$, являющуюся базисом в замыкании своей линейной оболочки Z_1, при этом можно считать, что $x^{**} \notin Z_1$ (7). Пусть Z линейная оболочка Z_1 и элемента x^{**}, а Z_2 — замыкание линейной оболочки элементов $z_1, z_2, \ldots$ Пространства Z_1 и Z_2 — подпространства с дефектом 1 пространства Z. Значит (см. [6]) Z_1 изоморфно Z_2 и поэтому Z_2 имеет базис. Покажем, что базис в Z_2 образуют элементы $z_1, z_2, \ldots$ (подпоследовательность последовательности (x_{n_k})). Для этого образуем оператор $Pz^{**} = z^{**} + x^{***}(z^{**}) x^{**}$ $(z^{**} \in Z)$, где x^{***} — линейный функционал на X^{**}, анулирующий Z_2 и равный -1 на элементе x^{**}. Легко видеть, что P — проектор, отображающий Z на Z_2, причём $Px^{**} = 0$. Так как $x^{**} \notin Z_1$, то P осуществляет изо-

(7) Действительно, так как $x^{**} \neq 0$, то найдётся такой индекс k_0, что x^{**} не принадлежит пространству натянутому на элементы $z_{k_0} - x^{**}, z_{k_0+1} - x^{**}, \ldots$ Достаточно теперь заменить последовательность $(z_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ последовательностью $(z_\nu)_{\nu=k_0}^{\infty}$.

морфизм между Z_1 и Z_2. При этом члену базиса $z_\nu - x^{**} \in Z_1$ он сопоставляет вектор z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Значит элементы $z_1, z_2, \ldots$ образуют базис в Z_2.

Рассмотрим теперь случай б. Тогда для произвольного счётного, нормирующего для X множества

$$\Gamma = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x_m^*\} \subset X^*$$

найдётся подпоследовательность (x_{n_k}) такая, что $|x_m^* x_{n_k}| < 1/k$ для $m = 1, 2, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots$ Значит $x_{n_k} \xrightarrow[\Gamma]{} 0$. Для завершения доказательства достаточно применить теорему 1.

Следствие 2 ([2], стр. 156). *Любая слабо, но не сильно сходящаяся к нулю последовательность элементов произвольного F-пространства содержит бесконечную базисную последовательность.*

Следствие 3. *Пусть A ограниченное подмножество F-пространства X такое, что замыкание A в сильной топологии X не компактно. Тогда существует бесконечное подмножество B множества A натягивающее подпространство E_B с базисом.*

Доказательство. В силу теоремы 2, Теоремы Эберлейна-Шмульяна [11], стр. 430, и следствия 1 достаточно рассмотреть случай, когда слабое замыкание A слабо-компактно в X, но не существует слабо сходящаяся к нулю и сильно не сходящаяся последовательность элементов из A. В этом случае существует $0 \neq x_0 \in X$ и последовательность (a_p) элементов из A слабо, но не сильно (так как A не компактно) сходящаяся к x_0. Используя следствие 2, выделим из последовательности $(x_0 - a_p)$ бесконечную базисную последовательность $(x_0 - x_n)$. При этом можно требовать, чтобы x_0 не принадлежало замыканию линейной оболочки Z, натянутой на элементы $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2, \ldots$ (Действительно, в противном случае, $0 \neq x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n (x_0 - x_n)$. Значит, существует n_0 такое, что $t_{n_0} \neq 0$. Достаточно исходную последовательность заменить последовательностью $(x_0 - x_n), n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1, n_0 + 1, \ldots$). Приймём в качествие E_B замкнутое подпространство, натянутое на элементы $x_0, x_0 - x_1, x_0 - x_2, \ldots$ Так как x_0 не принадлежит пространству Z, натянутому на базисную последовательность $(x_0 - x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то элементы $x_0, x_0 - x_1, x_0 - x_2, \ldots$ образуют базис в E_B. Пусть

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}.$$

Так как последовательность (x_n) слабо сходится к x_0, то x_0 принадлежит замыканию линейной оболочки элементов последовательности (x_n) ([11], стр. 422). Значит B натягивает E_B.

Замечание 3. Как вытекает из анализа доказательств теоремы 2 и следстваия 3, множество B можно выбрать таким образом, чтобы базис в E_B образовали элементы из множества B в том случае, когда, или слабое замыкание A в X не слабо-компактно, или A содержит слабо, но не сильно, сходящуюся к нулю последовательность. В другом случае в качестве B можно взять множество элементов некоторой слабо, но не сильно, сходящейся последовательности (x_n). Тогда базис в E_B образуют элементы $x_0, x_0 - x_1, x_0 - x_2, \ldots$, где x_0 слабый предел последовательности (x_n).

Следствие 4. *Пусть A ограниченное множество в произвольном F-пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *слабое замыкание A в X не слабо компактно,*
2. *существует подпространство пространства X, обладающее базисом, такое, что слабое замыкание пересечения A с этим подпространством не слабо-компактно,*
3. *A содержит базисную последовательность, в которой элементы слабо не сходятся к нулю,*
4. *существует $x_0^* \in X^*$ и базисная последовательность (x_n) в A такие, что $\inf_n x_0^* x_n > 0$.*

Следствие 5. *Рассмотрим следующие свойства F-пространств*:
(α_1) — *рефлексивность,*
(α_2) — *слабая полнота,*
(α_3) — *существование в любом ограниченном бесконечном подмножестве пространства не стационарных слабых последовательностей Коши,*
(α_4) — *предкомпактность ограниченных множеств* ([8], Fascicule de résultats, § 7, 7). *F-пространство X обладает свойством (α_i), $i = 1, 2, 3, 4$, тогда и только тогда, когда любое подпространство X с базисом обладает этим свойством.*

Доказательство. Из теоремы 2, следствия 3 и определения свойств (α_i), $i = 1, 2, 3, 4$ (в случае (α_1) — используя еще теорему Эберлейна-Шмульяна [11], стр. 430) непосредственно следует, что, если X не обладает свойством (α_i), $i = 1, 2, 3, 4$, то найдется подпространство с базисом, которое тоже не обладает этим свойством. С другой стороны, как известно, каждое из рассматриваемых свойств сохраняется при переходе к подпространству.

Замечание 4. Не известно, можно ли распространить следствие 5 на случай следующих свойств: (α_5) — ядерность [17], (α_6) — тип S, т. е. пространство является пространством Шварца [16], (α_7) — пространство изоморфно гильбертовому пространству.

Замечание 5. Как заметил В. И. Гурарий, предположения ограниченности и некомпактности относительно множества A в следствии 3 в некоторой степени существенны. Действительно, в любом бесконечномерном сепарабельном F-пространстве существует множество, любая бесконечная часть которого натягивает всё пространство ([32], стр. 193). Отсюда следует, что предложение: „Любое бесконечное множество сепарабельного F-пространства X содержит бесконечное подмножество, натягивающее подпространство с базисом" равносильно гипотезе „X имеет базис". С другой стороны, используя следствие 3, легко доказать, что любое множество в F-пространстве X такое, что любое его бесконечное подмножество натягивает всё пространство X или неограниченно, или вполне ограниченно.

Замечание 6. Доказательство теоремы 2 и её следствий (в частности следствия 4), приведены в настоящей работе, используют теорему 1 и теорему Эберлейна-Шмульяна. В работе [41] непосредственно доказано существование бесконечных базисных последовательностей в любом ограниченном подмножестве (банахового пространства), слабое замыкание которого не слабо компактно. Этот факт используется в [41] для доказательства теоремы Эберлейна-Шмульяна, но из него тоже следует теорема 1 настоящей статьи. Для простоты ограничимся случаем когда (x_n) ограниченная последовательность элементов произвольного банахового пространства удовлетворяющая условию (i′) теоремы 1. Тогда, если слабое замыкание множества элементов последовательности (x_n) не слабо компактно, то достаточно применить выше упоминаемый результат из [41]. В противном случае из (i′) следует, что последовательность (x_n) слабо, но не сильно сходится к нулю и следовательно (см. [2], стр. 156) содержит бесконечную базисную последовательность.

3. Расщепление биортогональной нормирующей системы

Теорема 3. *Каждая нормирующая биортогональная система в любом сепарабельном F-пространстве X разбивается на две подпоследовательности, каждая из которых является базисом со скобками в замыкании своей линейной оболочки. Другими словами, если (x_n, x_n^*) биортогональная нормирующая система, то существуют последовательности индексов n_k и m_k такие, что*

(14) $$1 = n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots,$$

(15) *если* $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ *и* $t_n = 0$ *для* $m_k \leqslant n < n_{k+1}$

$(k = 1, 2, \ldots)$ (*или* $t_n = 0$ *для* $n_k \leqslant n < m_k$; $k = 1, 2, \ldots$),

то $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k}^{m_k-1} t_n x_n = x$ (*соотв.* $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m_k}^{n_{k+1}-1} t_n x_n = x$).

Лемма 5. *Пусть X — F-пространство, $\Gamma \subset X^*$ нормирующее множество, являющееся линейной оболочкой некоторой последовательности линейных функционалов (x_n^*) и $(|\cdot|_m)$ полная возрастающая последовательность полунорм, согласованных с Γ. Тогда для любого конечномерного пространства E, индекса m и $\varepsilon > 0$ найдется индекс $N(E, \varepsilon, m)$, такой что, если $x \in X$ и $x_n^* x = 0$ для $n = 1, 2, \ldots, N(E, \varepsilon, m)-1$, то $|e+tx|_k \geqslant (1-\varepsilon)|e|_k$ для произвольного скаляра t, всех $e \in E$ и $k = 1, 2, \ldots, m$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что для каждого $e \in E$, индекса m и $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(e, \varepsilon/2, m)$ такое, что если $x \in X$, $x_n^* x = 0$ для $n = 1, 2, \ldots, N$, то $|e+tx|_k \geqslant (1-\frac{1}{2}\varepsilon)|e|_k$ для произвольного скаляра t и $k = 1, 2, \ldots, m$. Действительно, в противном случае можно бы найти возрастающую последовательность индексов (N_ν) и элементов (x_ν); индекс m_0 и $\varepsilon > 0$ такие, что

(16) $$x_n^* x_\nu = 0 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots, N_\nu - 1,$$

(17) $$\overline{\lim_{\nu}} \inf_{t} |e+tx_\nu|_{m_0} < (1-\tfrac{1}{2}\varepsilon)|e|_{m_0}.$$

Но из (16) следует, что $\lambda_\nu x_\nu \underset{\Gamma}{\to} 0$ для каждой последовательности скаляров λ_ν откуда в силу предложения 3 вытекает

$$\lim_{\nu} \inf_{t} |e+tx_\nu|_{m_0} = |e|_{m_0},$$

что противоречит (17). Далее буквально повторяется доказательство леммы 3.

Доказательство теоремы 3. Пусть Γ — линейная оболочка функционалов x_n^* биортогональной системы (x_n, x_n^*). Введем (в силу предложения 1) в X полную возрастающую систему полунорм $(|\cdot|_m)$, согласованную с Γ и удовлетворяющую условию (K_2) предложения 1. Обозначим через E_n подпространство X, натянутое на элементы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Пусть ε_k произвольная последовательность положительных чисел, монотонно убывающая к нулю и $\varepsilon_1 < 1$. Положим $n_1 = 1$, $m_1 = 2$, $n_k = N(E_{m_{k-1}}, \varepsilon_{k-1}, k-1)$, $m_k = N(E_{n_k}, \varepsilon_{k-1}, k-1)$ $(k = 2, 3, \ldots)$, где индексы $N(E_{m_{k-1}}, \varepsilon_{k-1}, k-1)$ и $N(E_{n_k}, \varepsilon_{k-1}, k-1)$ выбираются по лемме 5. Так как, для $\varepsilon < 1$, $N(E_r, \varepsilon, m) > r$ для произвольного m и $r = 2, 3, \ldots$, то $1 = n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ Остается проверить, что последовательности (n_k) и (m_k) удовлетворяют условию (15). Пусть

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$$

и $t_n = 0$ для $m_k \leqslant n < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$S_r x = \sum_{k=1}^{r} \sum_{n_k}^{m_k - 1} t_n x_n \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Надо показать, что $\lim S_r x = x$. Так как $x_n^* S_r x = x_n^* x$ $(r \geqslant n)$ для $n = 1, 2, \ldots,$ то $S_r x \underset{\Gamma}{\to} x$ и в силу (K_1)

$$\underline{\lim_r} |S_r x|_m \geqslant |x|_m \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

С другой стороны, $x = S_r x + (x - S_r x)$. Из определения $S_r x$ и предположения про x следует, что $S_r x \in E_{m_r}$ и $x_n^*(x - S_r x) = 0$ для $n = 1, 2, \ldots, n_{r+1} - 1$ $(n_{r+1} = N(E_{m_r}, \varepsilon_r, r))$. Отсюда в силу леммы 6

$$|x|_m = |S_r x + (x - S_r x)|_m \geqslant (1 - \varepsilon_r)|S_r x|_m \quad \text{для} \quad m \leqslant r.$$

Предельный переход дает

$$|x|_m \geqslant \overline{\lim_r} (1 - \varepsilon_r)|S_r x|_m = \overline{\lim_r} |S_r x|_m \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что $\lim |S_r x|_m = |x|_m$ и так как $S_r x \underset{\Gamma}{\to} x$ то в силу (K_2)

$$\lim_r S_r x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k}^{m_k - 1} t_n x_n = x.$$

Доказательство для

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$$

и $t_n = 0$ для $n_k \leqslant n < m_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ аналогично.

4. Теоремы о мультипликаторах

Теорема 4. *Пусть X сепарабельное F-пространство; $\Xi = (x_n, x_n^*)$ нормирующая биортогональная система.*

Если для некоторого элемента $x \in X$ мультипликатор $M(x, \Xi)$ содержит все последовательности $\gamma = (\gamma_i)$, составленные из чисел $\gamma_i = \pm 1$, то разложение $x \sim \sum_n (x_n^*, x) x_n$ безусловно сходится, причем

$$x_\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (x_n^* x) x_n \quad (\gamma_n = \pm 1). \tag{20}$$

Доказательство. Разобьем ряд (20) на два ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{m_\nu}^{n_\nu - 1} \gamma_i (x_i^* x) x_i \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n_\nu}^{m_{\nu+1} - 1} \gamma_i (x_i^* x) x_i, \tag{21}$$

где m_i и n_i — индексы, определенные при доказательстве теоремы 3. Из условий теоремы 4 непосредственно следует, что ряды (21) являются соответственно разложениями некоторых элементов x'_γ и x''_γ, сумма которых равна x_γ. (О сходимости этих рядов мы пока ничего не знаем!)

Согласно теореме 3

$$x'_\gamma = \lim_{N \to \infty} \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{m_\nu}^{n_\nu - 1} \gamma_i (x_i^* x) x_i, \quad x''_\gamma = \lim_{N \to \infty} \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{n_\nu}^{m_{\nu+1} - 1} \gamma_i (x_i^* x) x_i. \tag{22}$$

Сложим равенства (22):

$$x_\gamma = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{p_\nu} \gamma_i (x_i^* x) x_i \quad (p_{2\nu - 1} = m_\nu,\ p_{2\nu} = n_\nu). \tag{23}$$

Таким образом, ряд (20) сходится по последовательности индексов p_ν. Покажем, что он сходится в обычном смысле. Здесь нам потребуется следующее почти очевидное замечание. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ произвольные элементы пространства X, тогда

$$\max_{\gamma_i = \pm 1} \Big| \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i \Big| \leqslant \max_{\gamma_i = \pm 1} \Big| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i \Big| \tag{24}$$

для любой полунормы. Действительно, пусть $\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \ldots, \bar\gamma_{n-1}$ те значения γ_i, для которых достигается максимум левой части (24). Согласно неравенству треугольника

$$\Big| \sum_{i=1}^{n-1} \bar\gamma_i z_i \Big| \leqslant \frac{1}{2} \Big\{ \Big| \sum_{i=1}^{n-1} \bar\gamma_i z_i + z_n \Big| + \Big| \sum_{i=1}^{n-1} \bar\gamma_i z_i - z_n \Big| \Big\}.$$

Заменив оба слагаемых в фигурной скобке правой частью неравенства (24), получим доказательство замечания.

Продолжим доказательство теоремы. Допустим, что для какой-то последовательности $\gamma = (\gamma_i)$ ряд (20) расходится. Тогда найдется последовательность отрезков ряда (20) таких, что

$$\Big| \sum_{i=q_\nu}^{r_\nu} \gamma_i (x_i^* x) x_i \Big|_k \geqslant \delta > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots;\ q_1 < r_1 < q_2 < r_2 < \ldots) \tag{25}$$

для какой-то из полунорм, определяющих топологию пространства X. Если каждый из отрезков (20) заменить наименьшим содержащим его отрезком, ограниченным индексами p_ν, определенными в (23) $(p'_\nu \leqslant q_\nu < r_\nu \leqslant p''_\nu)$, то согласно сделанному выше замечанию можно найти такие коэффициенты $\gamma_i^* = \pm 1$, что

$$\Big| \sum_{i=p'_\nu}^{p''_\nu} \gamma_i^* (x_i^* x) x_i \Big|_k \geqslant \delta > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

а это противоречит (23). Таким образом, ряд (20) сходится для любого набора множителей $\gamma_i = \pm 1$, что и доказывает теорему 4.

Очень вероятно, что теорема 4 верна без предположения, что биортогональная система (x_n, x_n^*) нормирующая. Ниже следующие результаты кажется подтверждают эту гипотезу.

В последних двух теоремах мы не требуем, чтобы система $\Xi = (x_n, x_n^*)$ была нормирующей, ограничиваясь требованием тотальности множества функционалов (x_n^*).

Теорема 5. *Пусть X сепарабельное F-пространство. Если для некоторого элемента $x \in X$ мультипликатор $M(x, \Xi)$ содержит все ограниченные последовательности $\gamma = (\gamma_i)$, то разложение $x \sim \sum_n (x_n^* x) x_n$ безусловно сходится, причем*

$$x_\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (x_n^* x) x_n.$$

Доказательство. Для данного элемента $x \in X$ рассмотрим аддитивный и однородный оператор T_x, следующим образом отображающий банахово пространство m всех ограниченных числовых последовательностей в пространство X:

$$T_x \gamma = x_\gamma \quad (\gamma \in m;\ x_\gamma \sim \sum_n \gamma_n (x_n^* x) x_n \in X).$$

Покажем, что оператор T_x замкнутый, откуда по теореме о замкнутом графике будет следовать его непрерывность. Доказательство замкнутости проводится стандартным способом: пусть

$$\lim_k \gamma^{(k)} = \gamma^{(0)} \quad \text{и} \quad \lim_k T_x \gamma^{(k)} = y;$$

так как функционалы x_n^* непрерывны, то

$$x_n^* y = \lim_k x_n^* T_x \gamma^{(k)} = \gamma_n^{(0)} (x_n^* x) = x_n^* T_x \gamma^{(0)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как множество (x_n^*) тотально, то $y = T_x \gamma^{(0)}$, что и доказывает замкнутость, а значит и непрерывность оператора T_x. Рассмотрим в m последовательность элементов $\beta^{(n)} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, 0, 0, \ldots)$; эта последовательность слабо фундаментальна. Из результатов Гротендика [15], стр. 168, следует, что каждый линейный оператор из m в сепарабельное F-пространство переводит слабо фундаментальные последовательности в сильно фундаментальные. Значит последовательность

$$T_x \beta^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x_i^* x) x_i$$

сильно сходится к $T_x \gamma = x_\gamma$, что и доказывает теорему 5.

Теорема 6. *Пусть X — банахово пространство, не содержащее подпространства, изоморфного c. Если для некоторого $x \in X$ мультипликатор $M(x, \Xi)$ содержит все сходящиеся числовые последовательности $\gamma = (\gamma_i)$, то разложение $x \sim \sum_n (x_n^*, x) \gamma_n x_n$ безусловно сходится, причем*

$$x_\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (x_n^*, x) x_n.$$

Доказательство. Так же как и в теореме 5 строим оператор T_x, отображающий банахово пространство c всех сходящихся числовых последовательностей в пространство X,

$$T_x \gamma = x_\gamma \quad \Big(\gamma \in c;\ x_\gamma \sim \sum_n \gamma_n (x_n^*, x) x_n \in X\Big),$$

и показываем, что он непрерывен. Для завершения доказательства нужно установить, что T_x переводит слабо фундаментальные последовательности в сильно фундаментальные. Это вытекает из следующих предложений: (a) линейный оператор, отображающий $C(S)$ (S — бикомпакт) в банахово пространство X, не содержащее подпространства, изоморфного c, слабо вполне непрерывен ([39], Theorem 5); (δ) слабо вполне непрерывный оператор из $C(S)$ в X переводит слабо фундаментальные последовательности в сильно фундаментальные ([11], стр. 494).

Цитированная литература

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] C. Bessaga and A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. 17 (1958), стр. 151-164.

[3] — *A generalization of results of R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, ibidem, стр. 165-174.

[4] — *Własności baz w przestrzeniach B_0*, Prace Matematyczne 3 (1959), стр. 123-142.

[5] — *On a class of B_0-spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., III 5 (1957), стр. 375-377.

[6] — *Banach spaces non isomorphic to their Cartesian squares I*, ibidem, Sér. sci. math. astr. et phys., 8 (1960) стр. 77-80.

[7] C. Bessaga, A. Pełczyński and S. Rolewicz, *On diametral approximative dimension and linear homogenity of F-spaces*, ibidem 8 (1960), стр. 757-761.

[8] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Espaces vectoriels topologiques*, Paris 1955.

[9] M. M. Day, *On basis problem in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), стр. 655-658.

[10] — *Normed linear spaces*, New York 1962.

[11] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators I*, New York 1958.

[12] B. R. Gelbaum, *Banach spaces and bases*, An. Acad. Brasil Ci. 30 (1958), стр. 29-36.

[13] М. М. Гринблюм, *Certains théorèmes sur la base dans un espace du type (B)*, ДАН СССР 31 (1941), стр. 428-432.

[14] — *О представлении пространства типа B в виде прямой суммы его подпространств*, ibidem 70 (1950), стр. 749-752.

[15] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*, Canadian J. Math. 5 (1953), стр. 129-173.

[16] — *Sur les espaces F et DF*, Summa Brasil. Math. 3 (1954), стр. 57-123.

[17] — *Produits tensorieles topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. no. 16 (1955).

[18] В. И. Гурарий, *О наклонах подпространств и условных базисах в пространствах Банаха*, ДАН СССР 145 (1962), стр. 504-506.

[19] — *О базисах в пространстве непрерывных функций*, ibidem 148 (1963), стр. 493-495.

[20] В. И. Гурарий и М. И. Кадец, *О минимальных системах и квазидополнениях в пространстве Банаха*, ibidem 145 (1962), стр. 256-268.

[21] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Annals of Math. 52 (1950), стр. 518-527.

[22] — Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), стр. 384 (communique).

[23] — *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Annals of Math. 66 (1957), стр. 159-169.

[24] — *Characterizations of reflexivity*, Studia Math. 23 (1964), стр. 205-216.

[25] — *Weakly compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), стр. 129-140.

[25ᵃ] — *Weak compactness and reflexivity*, Israel Journal of Mathematics 2 (1964), стр. 101-119.

[26] М. И. Кадец, *О слабой и сильной сходимости*, ДАН. СССР 122 (1958), стр. 13-16.

[27] — *О связи между слабой и сильной сходимостью*, ДАН УССР 9 (1959), стр. 949-952 (на украинском).

[28] — *О пространствах изоморфных локально равномерно выпуклым*, Известия вузов. Математика, 1959, стр. 51-57.

[29] — *Письмо в редакцию*, ibidem 1961, стр. 139-141.

[30] — *О биортогональных системах и базисах суммирования*, *Функциональный анализ и его применения*, Акад. Наук Азерб. СССР, Баку 1961, стр. 106-108.

[31] — *Некоторые вопросы геометрии банаховых пространств*, Автореферат докторской диссертации, Москва 1963.

[32] V. L. Klee, *On the Borelian and projective types of linear subspaces*, Math. Scand. 6 (1958), стр. 189-199.

[33] А. Ю. Левин и Ю. И. Петунин, *Некоторые вопросы связаные с понятием ортогональности в пространстве Банаха*, Усп. Матем. Наук 18 (1963), стр. 167-170.

[34] C. W. McArthur, *Generalized Schauder bases*, Pacific J. Math. (в печати).

[35] В. Д. Мильман и Д. П. Мильман, *Некоторые геометрические свойства нерефлексивных пространств*, ДАН СССР 152 (1963), стр. 52-54.

[35ᵃ] — *Некоторые свойства нерефлексивных пространств*, Матем. сб. 65 (107) (1964), стр. 486-497.

[36] W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen V*, Studia Math. 6 (1936), стр. 20-38.

[37] — *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen VI*, ibidem 8 (1938), стр. 141-147.

[38] V. Pták, *Biorthogonal systems and reflevixity of Banach spaces*, Czechoslovak Math. Journal 9 (84) (1959), стр. 319-326.

[39] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), стр. 209-228.

[40] — *A note to the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces"*, ibidem 21 (1962), стр. 371-374.

[41] — *Some problems on bases in Banach and Fréchet spaces*, Israel Journal of Mathematics 2 (1964), стр. 132-138.

[42] — *A proof of Eberlain-Smulian theorem by an application of basic sequence method*, Bull. Acad. Polon Sci., Ser sci. math., astr. et phys., 12 (1964), стр. 543-548.

[43] A. Pełczyński and I. Singer, *On non equivalent bases and conditional bases in Banach spaces*, Studia Math. 25 (1965), стр. 5-25.

[44] B. L. Sanders, *On a generalization of the Schauder basis concept*, Dissertation, The Florida State University, 1962.

[45] I. Singer, *Basic sequences and reflexivity in Banach spaces*, Studia Math. 21 (1962), стр. 351-369.

[46] — *Bases in Banach spaces I*, Studii şi cercetări matematice 14 (1963), стр. 533-585 (на румынском языке); *II*, ibidem 15 (1964), стр. 157-208; *III*, ibidem 15 (1964), стр. 675-725.

Reçu par la Rédaction le 22. 6. 1964