1973 г. ноябрь—декабрь *т. XXVIII, вып. 6 (174)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.948

ДОПОЛНЯЕМЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. И. Кадец, Б. С. Митягин

Введение

Одним из замечательных геометрических свойств гильбертова пространства H является возможность ортогонального проектирования; точнее, для любого замкнутого подпространства F в H имеет место разложение $H = F \oplus F^{\perp}$, где $F^{\perp} = \{x \in H\colon (f, x) = 0,\ \forall f \in F\}$, т. е. любой вектор $h \in H$ представи́м в виде $h = f + f^{\perp}$, $f \in F$, $f^{\perp} \in F^{\perp}$, и это представление единственно.

Вообще, подпространство X_1 банахова пространства X называется *дополняемым*, если существует другое подпространство X_2 (*дополнение*) такое, что любой элемент $x \in X$ представи́м единственным образом в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Очевидно, что X_1 в свою очередь является дополнением X_2. Говорят также в этом случае, что X *разлагается в прямую сумму* подпространств X_1 и X_2 и пишут $X = X_1 \dotplus X_2$. С каждой парой взаимно дополнительных подпространств связан линейный ограниченный проектор P_1, отображающий X на X_1 вдоль X_2, т. е. $\operatorname{Im} P_1 = X_1$, $\operatorname{Ker} P_1 = X_2$, $P_1^2 = P_1$. Наоборот, каждый проектор порождает пару взаимно дополнительных подпространств. Рассматривают также дополнительный проектор $P_2 = 1 - P_1$, отображающий X на X_2 вдоль X_1. Норма проектора P_1 может служить для оценки «качества» дополнения: чем больше $\|P_1\|$, тем «хуже» дополнение. Если $\|P_1\| = 1$, то говорят, что X_2 является *ортогональным дополнением* подпространства X_1; ортогональное дополнение во многих отношениях оказывается наилучшим. Заметим, что норма дополнительного проектора в этом случае, вообще говоря, отлична от единицы. Если подпространство дополняемо, то оно имеет бесконечно много различных дополнений (исключая тривиальные случаи $X_1 = \{0\}$ и $X_1 = X$); так дополнительным к X_1 будет любое подпространство вида $\widetilde{X}_2 = \{Az + z\colon z \in X_2\}$, где $A\colon X_2 \to X_1$ — линейный оператор. (Описание различных проекторов на X_1 см. ниже в лемме 1.1 Собчика.) В связи с этим вводится понятие *относительной проекционной постоянной*, характеризующей степень дополняемости X_1 в X: $\lambda(X_1, X) = \inf \|P\|$, где P пробегает все проекторы из X на X_1; если X_1 не имеет дополнения в X, то полагаем $\lambda(X_1, X) = \infty$.

Каждое конечномерное подпространство банахова пространства дополняемо. Его проекционная постоянная допускает оценку [14]

$$\lambda(X_1, X) \leqslant (\dim X_1)^{1/2}. \tag{0.1}$$

Более элементарной и давно известной является оценка

$$\lambda(X_1, X) \leqslant \dim X_1. \tag{0.2}$$

Это, по существу, лемма Ауэрбаха; ее доказательство см., например, в [37], § 8.4.1.

Существование недополняемых (бесконечномерных) подпространств впервые установили в 1933 г. С. Банах и С. Мазур [1]. Они рассуждали следующим образом. Пусть X_1 — подпространство банахова пространства X, имеющее дополнение, и P — соответствующий проектор. Тогда сопряженный оператор P^* осуществляет изоморфное вложение X_1^* в X^*. Положим $X = C[0, 1]$, пространству всех непрерывных функций на единичном отрезке; тогда X^* — пространство всех конечных борелевских мер на отрезке $[0, 1]$ — слабо полное пространство. В качестве X_1 выберем какое-нибудь подпространство в $C[0, 1]$, изоморфное l_1 (например, подпространство, натянутое на лакунарную тригонометрическую систему $x_n = \sin 2^n \pi t$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$). Его сопряженное $X^* \simeq l_\infty$ не является слабо полным пространством и, следовательно, не может быть изоморфно вложено в X^*. Поэтому X_1 не имеет дополнения в X.

Г. М. Фихтенгольц и Л. В. Канторович показали [44], что $C[0, 1]$ не дополняемо в $L_\infty[0, 1]$. Примеры недополняемых подпространств в банаховых пространствах L_p, l_p $(1 \leqslant p, p \neq 2)$, c_0, l_∞, L_∞ и некоторых других построили в 1937—1941 гг. Муррей [31], Собчик [42], Филлипс [46] и Коматузаки [17], [18]. Новую серию примеров недополняемых подпространств дает гармонический анализ (Х. Хельсон [47], У. Рудин [39], Х. Розенталь [38], Г. М. Хенкин [48], Ч. Фефферман [43], Б. С. Митягин [28]). В § 1 будут разобраны некоторые из этих примеров.

Наиболее сильное продвижение общая теория дополняемых подпространств получила в последние пятнадцать лет. Здесь прежде всего следует отметить работы А. Пелчинского и И. Линденштраусса [33], [21], [22]. Приведем некоторые результаты этих работ, решающие в значительной степени вопрос о дополняемых подпространствах в пространствах (суммируемых) последовательностей.

Если бесконечномерное подпространство E в l_p, $1 \leqslant p < \infty$, дополняемо, то оно изоморфно l_p; если E изометрично l_p, то оно имеет в l_p ортогональное дополнение (А. Пелчинский [33]). *Если E — бесконечномерное подпространство в X, где $X = c_0$ или l_∞, то E дополняемо тогда и только тогда, когда оно изоморфно X* (А. Пелчинский [33], И. Линденштраусс [22]). Однако до самого последнего времени оставался открытым вопрос: существует ли банахово пространство, отличное от гильбертова, в котором каждое замкнутое подпространство имеет дополнение? Ответ (отрицательный) на этот вопрос недавно получили И. Линденштраусс и М. Цафрири [23]. Ими доказана

Теорема 2.0. *Для того чтобы бесконечномерное банахово пространство было изоморфно гильбертову, необходимо и достаточно, чтобы в нем каждое замкнутое подпространство имело дополнение.*

Мы изложим доказательство этой теоремы в § 2. Отметим, что весьма существенным моментом в доказательстве является глубокая теорема А. Дворецкого [10] о сечениях выпуклых тел высокой размерности. Некоторые отличия нашего изложения от оригинального связаны с желанием получить более точные оценки (формулы (2.3) и (2.4) ниже), связывающие проекционные постоянные и характеристики изоморфизмов.

В статье рассматриваются банаховы пространства, как вещественные, так и комплексные, и хотя соответствующие оговорки далее не делаются, все конструкции верны в обоих случаях. Правда, предложение 2.1 доказано [10], [24] лишь в вещественном случае. Недавно В. Д. Мильман, развивая подход [24], показал [25], что теорема А. Дворецкого верна и в случае комплексных банаховых пространств. Тем самым теорема 2.0 также верна не только в вещественном, но и в комплексном случае.

§ 1. Конкретные примеры недополняемых подпространств

1. Одни из первых примеров недополняемых подпространств были даны Мурреем [31] и Собчиком [42]; это — подпространства в l_p, $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$ (см. также [16], § 31). Конструкция Собчика весьма поучительна, и, поскольку на русском языке она не излагалась, мы приведем ее довольно подробно. К тому же, построенное при этом подпространство Собчика E в l_p близко к пространству Энфло [36].

Достаточно решать конечномерную задачу, т. е. построить в l_p^n, координатном пространстве с нормой $\|x|l_p^n\| = \left(\sum_1^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, подпространство E_n так, чтобы $\lambda(E_n, l_p^n) \to \infty$ при $n \to \infty$, где

$$\lambda(E, X) = \inf \|P\|,$$

нижняя грань берется по всем проекторам из X на $E \subset X$. Можно даже ограничиться подпоследовательностью $n = n_j \to \infty$ индексов. Действительно, бесконечномерное l_p можно рассматривать как $(l_p^{n_j})_p$, т. е. пространство последовательностей $x = \{x_j\}_1^\infty$, $x_j \in l_p^{n_j}$ таких, что $\|x\|^p = \sum_1^\infty \|x_j| l_p^{n_j}\|^p < \infty$, с нормой $\|x\|$. Каждое $l_p^{n_k}$ дополняемо в l_p, и норма проектора P_k: $x \to \{x_j^k\}_{j=1}^\infty$, $x_j^k = 0$, $j \neq k$; $x_k^k = x_k$, равна 1. Выберем в l_p подпространство $E = (E_j)_p$, т. е.

$$E = \{x = (x_j)_1^\infty \in l_p\colon\ x_j \in E_j \subset l_p^{n_j},\ j = 1, 2, \ldots\}.$$

Если E дополняемо, т. е. $E = Ql_p$, где Q — ограниченный проектор, то $Q_j = P_j Q I_j$, где I_j: $l_p^{n_j} \to l_p$ — тождественное вложение, I_j: $w \to v = \{v_k\}_1^\infty$, $v_k = 0$, $k \neq j$; $v_j = w$,— можно рассматривать как проектор из $l_p^{n_j}$

на E_j; при этом

$$\lambda(E_j,\ l_p^{n_j}) \leqslant \|Q_j\| \leqslant \|P_j\|\,\|Q\|\,\|I_j\| = \|Q\|,$$

т. е. $\sup \lambda(E_j,\ l_p^{n_j}) < \infty$, в то время как $\lambda(E_j,\ l_p^{n_j}) \to \infty$.

2. Итак, пусть E — подпространство в X, и P: $X \to X$ — ограниченный оператор в X, проектирующий X на E. Со всяким проектором P связывается инволюция $J = 2P - 1_X$; действительно, $J^2 = (2P-1)^2 = 4P^2 - 4P + 1 = 1$. Наоборот, всякая инволюция J порождает проектор $P = \frac{1}{2}(J+1)$. При указанном взаимно однозначном соответствии между проекторами и инволюциями

$$E = \operatorname{Im} P = \{x \in X\colon\ Jx = x\}.$$

1.1. Лемма. *Всякий проектор $\widetilde{P}$ из X на E имеет вид*

$$\widetilde{P} = \frac{1}{2}(1_X + J + H), \tag{1.1}$$

где H — произвольное непрерывное отображение в X, удовлетворяющее условию

$$JH = -HJ = H. \tag{1.2}$$

Доказательство. Необходимость. Положим $H = 2(\widetilde{P} - P)$; тогда имеет место соотношение (1.1). Поскольку $\widetilde{P}$ и P — проекторы на одно и то же подпространство E, то

$$\widetilde{P}P = P \quad \text{и} \quad P\widetilde{P} = \widetilde{P}. \tag{1.3}$$

Поэтому $\frac{1}{2}(1 + J + H)\cdot\frac{1}{2}(1+J) = \frac{1}{2}(1+J)$, откуда вытекает, что $HJ = -H$. Из второго соотношения (1.3) вытекает, что $JH = H$.

Достаточность. Только что проверено, что соотношения (1.2) и (1.3) эквивалентны. Поэтому для любого H со свойством (1.2) оператор $\widetilde{P}$ является проектором, так как $\widetilde{P}^2 = P\widetilde{P}P\widetilde{P} = PP\widetilde{P} = P\widetilde{P} = \widetilde{P}$, и его образ $\operatorname{Im}\widetilde{P}$ совпадает с подпространством $E = \operatorname{Im} P$. Действительно, для $x \in E$ имеем $\widetilde{P}x = \widetilde{P}(Px) = Px = x$, т. е. $E \subset \operatorname{Im}\widetilde{P}$, и аналогичные выкладки для элемента $y \in \operatorname{Im}\widetilde{P}$ показывают, что $\operatorname{Im}\widetilde{P} \subset \operatorname{Im} P$. Лемма доказана.

3. *Матрицами Уолша* назовем ортогональные матрицы W_ν порядка 2^ν, которые строятся следующим образом:

$$W_\nu = 2^{-\nu/2}U_\nu,\ U_0 = 1,\ U_{\nu+1} = \begin{pmatrix} U_\nu & U_\nu \\ U_\nu & -U_\nu \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Так как $W_\nu^2 = 1_n$ — тождественная матрица порядка $n = 2^\nu$, то W порождает в $l_p^{2^\nu}$ инволюцию; положим

$$E = E^+,\quad p < 2,\quad = E^-,\quad p > 2, \tag{1.5}$$

где

$$E_\nu^\pm = \{x \in l_p^{2^\nu}\colon\ W_\nu x = \pm x\}. \tag{1.6}$$

В виду ортогональности W выполнено соотношение $(E^\pm)^\perp = E^\mp$.

По лемме 1.1 всякий проектор $P\colon X \to E$ (здесь $X = l_p^{2^\nu}$, а индекс ν подпространства опускается) имеет вид $P = \frac{1}{2}(1 + W + H)$, причем $WH = -HW = H$. Последнее соотношение показывает, что у матрицы $H = (h_{jk})_1^n$ след $\operatorname{Tr} H = \sum_1^{2^\nu} h_{kk} = 0$. Но тогда $h_{kk} \geqslant 0$ при некотором k, и поскольку $W^2 = 1$, $WH = H$ и W симметрична, то

$$1 \leqslant 1 + h_{kk} = \sum_{j=1}^n w_{jk}(w_{jk} + h_{jk}) = \langle We_k,\ (W+H)e_k\rangle \leqslant \| We_k\|_q \cdot \|(W+H)e_k\|_p, \text{ где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Так как $|w_{jk}| = n^{-1/2}$, $n = 2^\nu$, то

$$\| We_k \|_q = \Big(\sum_1^n |w_{jk}|^q\Big)^{1/q} = (n \cdot n^{-q/2})^{1/q} = n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}},$$

и, тем самым,

$$\| W + H \|_p \geqslant \|(W+H)e_k\|_p \geqslant \| We_k \|_q^{-1} = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\| P \|_p \geqslant \frac{1}{2}(\| W + H \| - 1) \geqslant \frac{1}{2}(n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2-1}}).$$

Это дает хорошую оценку снизу проекционных постоянных, если $1 \leqslant p < 2$. Если же $p > 2$, то заметим, что для любого проектора $P\colon l_p^n \to E^-$ сопряженный к нему оператор $P'\colon l_q^n \to l_q^n$ также является проектором и $\operatorname{Ker} P' = (\operatorname{Im} P)^\perp = E^+$. Поэтому $\|P\|_p = \|P'\|_q \geqslant \|1 - P'\|_q - 1$, а так как $1 - P'$ — проектор на E^+ в l_q^n, $q < 2$, то, по доказанному выше,

$$\| P \|_p \geqslant \frac{1}{2}(n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} - 1) - 1 = \frac{1}{2}(n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} - 3).$$

Поскольку в проведенных рассуждениях P был произвольным проектором в l_p^n, $n = 2^\nu$, на E^+, $p < 2$, или E^-, $p > 2$, то тем самым доказано

1.2. Предложение. *Пусть $n = 2^\nu$ и W_ν — матрица Уолша* (1.4), *а $E^\pm$ — подпространства в l_p^n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определяемые соотношением* (1.6). *Тогда*

$$\lambda(E^+,\ l_p^n) \geqslant \frac{1}{2}(n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} - 1), \quad \text{если} \quad 1 \leqslant p < 2, \text{ и}$$

$$\lambda(E^-,\ l_p^n) \geqslant \frac{1}{2}(n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} - 3), \quad \text{если} \quad 2 < p \leqslant \infty.$$

Как объяснено выше в п. 1, из предложения 1.2 вытекает

1.3. Предложение. *В l_p, $1 \leqslant p < \infty$, и c_0 есть недополняемые подпространства.*

Действительно, $E_p^+ = (E_\nu^+)_p$ не дополняемо в l_p, $1 \leqslant p < 2$, а $E_p^- = (E_\nu^-)_p$ не дополняемо в l_p, $2 < p < \infty$ (и E_∞^- в c_0).

4. Новые примеры недополняемых подпространств, возникающие в гармоническом анализе, удобнее всего исследовать, пользуясь следующими рассуждениями У. Рудина [39].

1.4. Лемма. *Пусть в банаховом пространстве* X *действует (сильно непрерывно) компактная группа* G *операторов, т. е.*

$$T(g)\colon X\to X,\quad T(gh)=T(g)T(h),\quad T(1)=1_X,$$

и E *— инвариантное подпространство. Если* P *проектирует* X *на* E, *то существует и проектор* $\overline{P}$, *коммутирующий со всеми* $T(g)$, *причем* $\|\overline{P}\|\leqslant\leqslant M^2\|P\|$, *где* $M=\sup\{\|T(g)\|\colon g\in G\}$. *В частности, если все* $T(g)$ *— изометрии в* X, *то* $\|\overline{P}\|\leqslant\|P\|$.

Действительно, положим

$$\overline{P}x=\int_G T(g^{-1})PT(g)x\,dg,\quad x\in X,$$

где интегрирование ведется по мере Хаара на G. Так как подпространство E инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, то для любых $y\in E$ и $g\in G$

$$PT(g)y=T(g)y,$$

так что

$$\overline{P}y=\int_G T(g^{-1})PT(g)y\,dg=\int_G T(g^{-1})T(g)y\,dg=y,$$

а для любого $x\in X$

$$PT(g)x\in E\quad\text{и}\quad T(g^{-1})PT(g)x\in E,$$

так что $\overline{P}x\in E$ как предел выпуклых комбинаций векторов из E.

Итак, $\overline{P}x\in E$ для любого $x\in X$ и $\overline{P}y=y$ для любого $y\in E$, т. е. $\overline{P}$ — проектор на подпространство E. При этом

$$\|\overline{P}x\|\leqslant\int_G\|T(g^{-1})\|\,\|P\|\,\|T(g)x\|\,dg\leqslant M^2\|P\|\,\|x\|.$$

(Заметим, что $M<\infty$ в силу принципа равномерной ограниченности [6], гл. II, § 1.) Лемма доказана.

5. Ее применение особенно успешно в вопросе о недополняемости в том случае, когда инвариантный оператор-проектор $\overline{P}$ единствен. Например, справедлива

1.5. Лемма. *Если существует проектор* $P\colon C(S^1)\to A$, *где* A *— пространство всех голоморфных в открытом единичном круге* D^1 *и непрерывных в замкнутом* $\overline{D}^1$ *функций, то ограничен и проектор*

$$\overline{P}\colon C(S')\to A,\ \overline{P}z^n=\begin{cases} z^n, & n\geqslant 0,\\ 0, & n<0,\end{cases}$$

причем $\|\overline{P}\|\leqslant\|P\|$.

Действительно, в $C(S^1)$ действует группа S^1: $T(\varphi)f=f(\cdot-\varphi)$; при этом A инвариантно. Тогда для проектора

$$\overline{P}f=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{Pf(\cdot-\varphi)\}(\cdot+\varphi)\,d\varphi$$

имеем

$$\overline{P}e^{int} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{Pe^{int}e^{-in\varphi}\}(\cdot + \varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t+\varphi)}e^{-in\varphi}\, d\varphi = e^{int},$$

если $n \geqslant 0$, и

$$\overline{P}e^{int} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi}p_n(t+\varphi)\, d\varphi, \quad \text{если} \quad n < 0,$$

где $p_n \in A$. По теореме Фейера — Вейерштрасса каждая функция p_n равномерно приближается многочленами $q(z) = \sum\limits_0^N q_k z^k$. Но для любого $k \geqslant 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi}\cdot e^{ik(t+\varphi)}\, d\varphi = 0, \quad \text{если} \quad n < 0.$$

Поэтому $\overline{P}e^{int} = 0$, $n < 0$. Лемма доказана.

Более общим является следующее утверждение.

1.5а. Лемма (Берман — Марцинкевич). *Если конечномерные неприводимые представления, содержащиеся в представлении $g \to T(g)|E$ попарно не эквивалентны, то существует не более одного инвариантного проектора $\overline{P}$: $X \to E$, построенного в лемме* 1.4.

Доказательство этой леммы можно найти, например, у И. К. Даугавета [7].

6. После лемм 1.4 и 1.5 (1.5а) третьим шагом в доказательстве недополняемости E служит проверка того, что оператор $\overline{P}$,— единственно возможный инвариантный проектор, ограниченный, если существует хотя бы какой-то ограниченный проектор P: $X \to E$,— на самом деле не ограничен.

В случае леммы 1.5 такая проверка основана на простом примере: последовательность функций $f_N(t) = \sum\limits_1^N \frac{\sin nt}{n}$ в $C(S^1)$ равномерно ограничена [13], гл. 2, § 9, но ее $\overline{P}$-образы $\sum\limits_1^N \frac{1}{n}e^{int}$ в A не ограничены ($(\overline{P}f_N)(0) \to \infty$). Тем самым,

подпространство A в $C(S^1)$ не дополняемо.

Аналогично (или по соображениям двойственности) устанавливается результат Д. Ньюмана [32]: *в $L_1(S^1)$ не дополняемо пространство Харди* $H^1 = \{f \in L_1(S^1)\colon\ f \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f_k z^k,\ f_k = 0,\ k < 0\}$.

Более общим и сложным является следующее утверждение Хельсона [46]: *в $L_1(S^1)$ подпространство*

$$H^1_M = \{f \in L_1(S^1);\ f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_k z^k,\ f_k = 0,\ k \notin M\},$$

где M — подмножество целых чисел, дополняемо тогда и только тогда, когда M состоит из конечного числа арифметических прогрессий.

7. В многомерном случае возможно рассмотрение различных подпространств, аналогичных пространствам Харди.

Г. М. Хенкин [48], пользуясь описанной выше схемой, показал, что *в банаховом пространстве $C(S^n; T)$ непрерывных векторных полей на сфере S^n подпространство C^∇ градиентных полей не дополняемо.* (Точнее, C^∇ — замыкание в $C(S^n; T)$ подпространства полей вида $\operatorname{grad} f$, где $f \in C^\infty(S^n)$.)

Развитая А. Пелчинским [34] и Г. М. Хенкиным [48] методика позволила (см. также обзор [25], § 2) на основе изложенных выше фактов о недополняемости конкретных подпространств получать результаты о неизоморфности пространства A ([34], [38]) или пространства $C^k(M)$ k раз непрерывно дифференцируемых функций на гладком многообразии M [48] пространству $C[0, 1]$.

8. Долгое время стоял вопрос о том, ограничен ли в $L_p(R^n)$, $n \geqslant 2$, $p \neq 2$, проектор $\overline{P}_B$: $\overline{P}_B f = \{\chi_B(s)\tilde{f}(s)\}^\frown$, где $f \in C_0^\infty(R^n)$, бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, а $\sim$ и $\frown$ обозначает прямое и обратное преобразование Фурье. В случае $\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2n}$ вопрос решается отрицательно [51] просто рассмотрением действия этого оператора, например, на функции $f_0(t) = \chi_B(t/6)$; непосредственные вычисления показывают, что

$$\overline{P}_B f_0 \notin L_p(R^n), \quad \text{если} \quad p \leqslant \frac{2n}{n+1},$$

так что $\overline{P}_B$ неограничен в таких L_p. Но по соображениям двойственности

$$\|\overline{P}_B \mid L_{p'}\| = \|\overline{P}_B \mid L_p\|, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

так что $\overline{P}_B$ неограничен и в L_p, $p \geqslant \frac{2n}{n-1}$.

Только в 1971 г. Ч. Фефферманом [43] был решен отрицательно вопрос о проекторе $\overline{P}_B$ в $L_p(R^n)$, $n \geqslant 2$, при $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| < \frac{1}{2n}$, $p \neq 2$. Этот результат, как и сама схема доказательства Ч. Феффермана, используются во многих работах о (рас)сходимости спектральных разложений. Здесь в соответствии с нашей основной темой мы только отметим (вслед за заметкой [28]), что справедливо

1.6. Предложение. *Пусть V — компакт в R^n, $n \geqslant 2$, строго выпуклый или ограниченный гладкой поверхностью ∂V, и H_V^p обозначает подпространство в $L_p(R^n)$, замыкание тех функций из $C_0^\infty(R^n)$, образы Фурье которых равны тождественно нулю вне V. Тогда H_V^p не дополняемо в $L_p(R^n)$, если $p \neq 2$.*

Аналог леммы 1.5 в случае некомпактной группы сдвигов R^n

$$T_t\colon f(x) \to f(x-t), \quad t \in R^n, \quad f \in L_p(R^n),$$

также имеет место (см. лемму 3.1 в [38]). Поэтому из дополняемости H_V^p вытекала бы ограниченность проектора $\overline{P}_V$ в $L_p(R^n)$, $n \geqslant 2$, $p \neq 2$. Но этот оператор не ограничен, как показывают рассуждения Ч. Феффермана, основанные лишь на следующем геометрическом свойстве компакта V: существует точка $v_0 \in \partial V$ и ее окрестность $W \subset \partial V$ такие, что в каждой точке $w \in W$ имеется единственная опорная плоскость $\pi(w)$ и единичная нормаль $\tau(w)$ к ней задает непрерывное взаимно однозначное отображение W в S^{n-1}, единичную сферу в R^n.

9. Как и в лемме 1.5, легко показать, что *проектор Дирихле*

$$\overline{P}_N z^n = \begin{cases} z^n, & |n| \leqslant N, \\ 0, & |n| > N, \end{cases}$$

в $C(S^1)$ является наилучшим для подпространства E_N тригонометрических многочленов степени $\leqslant N$, т. е. для любого другого проектора P: $C(S^1) \to E_N$

$$\| \overline{P}_N \| \leqslant \| P \|$$

(это теорема Харшиладзе — Лозинского). Поэтому проекционная постоянная

$$\lambda (E_N;\ C(S^1)) = \| \overline{P}_N \| \sim \frac{4}{\pi} \log N$$

(по поводу асимптотики нормы оператора Дирихле см. [13], гл. 2, § 12).

Но есть ли другие (быть может, неинвариантные) проекторы P: $C(S^1) \to$ $\to E_N$ с той же минимальной нормой $\|\overline{P}_N\|$? Довольно тонкими рассмотрениями Чени, Хобби, Морис, Шурер и Ульберт показали [30], что *проектор $\overline{P}_N$ — единственный проектор P: $C(S^1) \to E_N$ с минимальной нормой.*

10. Проекционные постоянные для многих конечномерных подпространств указаны Грюнбаумом, Рутовицем и Даугаветом [3], [41], [7]. Так ([41], [7]),

$$\lambda (l_n^2;\ C(S^{n-1})) \simeq \sqrt{\frac{2n}{\pi}},$$

где

$$l_n^2 = \{f \in C(S^{n-1}):\ f = \sum_1^n a_k x_k \,|\, S^{n-1}\}.$$

1.7. Вопрос. Интересно было бы найти асимптотику проекционных постоянных дискретных пространств Липшица $\mathrm{lip}_n^N\ \alpha$ в многомерном случае. Точнее, обозначим через $\mathrm{lip}_n^N\ \alpha$ пространство функций f периода 1 на решетке

$$Q_n^N = \left\{ \left(\frac{k_1}{N},\ \ldots,\ \frac{k_n}{N} \right):\quad k_j \text{ — целые},\ \ 1 \leqslant j \leqslant n \right\},$$

с нормой

$$\| f \,|\, \mathrm{lip}_n^N \alpha \| = \sup \left\{ |f(x)|,\ \ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}:\ \ x,\ y \in Q_n^N \right\}.$$

Оно естественно (см. определение нормы) вкладывается в l_∞^M, где $M = N^n +$ $+ \frac{1}{2} N^n (N^n - 1)$.

В частности, как ведут себя проекционные постоянные $\lambda(\mathrm{lip}_n^N\ 1;\ l_\infty^{\overline{M}})$, где $\overline{M} = (n+1)N^n$, а вложение j: $\mathrm{lip}_n^N\ 1 \to l_\infty^{\overline{M}}$ осуществляется по правилу

$$f \to \left\{ \left(f(x),\ N \left(f\left(x + \frac{e_j}{N} \right) - f(x) \right) \right):\ x \in Q_n^N,\ 0 \leqslant x_j < 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n \right\}?$$

11. В п. 6 было доказано, что $A(D^1)$ недополняемо в $C(S^1)$. Аналогично можно показать, что $A(B^n)$ не дополняемо в $C(S^{2n-1})$; здесь

$$B^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \colon \textstyle\sum_1^n |z_k|^2 < 1\},$$

а $A(G)$ для любой области голоморфности $G \subset \mathbf{C}^n$ обозначает пространство функций, голоморфных внутри G и непрерывных в замыкании $\overline{G}$.

Но в случае областей G, не имеющих богатой группы автоморфизмов, схема Рудина неприменима. На основе иных соображений Г. М. Хенкиным (см. [49]; [25], § 2) был, в частности, разобран случай строго псевдовыпуклых областей G, т. е. областей вида $G = \{z \in \mathbf{C}^n \colon \varphi(z) < 0\}$, где φ — C^∞-вещественная функция, $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$, если $\varphi = 0$, и $\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \xi_i \bar{\xi}_j > 0$ для любых z и $\xi \in \mathbf{C}^n$.

1.8. Предложение. *Пусть G — с. п. в. о.; тогда $A(G)$ не дополняемо в $C(\partial G)$.*

В самих пространствах $A(G)$ есть подпространства, дополняемость которых существенна в других задачах анализа, например, в задаче о деформациях комплексных структур ([9], [19]). Так, со всяким замкнутым подмножеством (подмногообразием) $M \subset G$ связывается подпространство

$$E_M = \{f \in A(G) \colon f \,|\, M \,| \equiv 0\}.$$

А. Пелчинский [33] показал, что *в случае $G = D^1$ и $M \subset S^1$*, $\operatorname{mes} M = 0$, *это подпространство дополняемо.*

В случае полидиска $D^n = \{z \in \mathbf{C}^n \colon |z_j| < 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, как заметил А. Дуади [9] подмногообразие вида $M = \{z \in D^n : h(z) = 0\}$, где h — функция, голоморфная в окрестности замыкания $\overline{D^n}$, порождает дополняемое подпространство E_M, если $h \neq 0$ на части границы $D^{n-1} \times S^1$. Осталось не выясненным, имеет ли место дополняемость E_M лишь при предположении о том, что $h \neq 0$ на шиловской границе $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ раз}}$.

Подмногообразие M в G назовем *правильным*, если $M = \widetilde{M} \cap G$, где $\widetilde{M}$ — подмногообразие в некоторой окрестности $U(\overline{G})$ замыкания $\overline{G}$, трансверсально пересекающее границу ∂G. *Если G — с. п. в. о. в $\mathbf{C}^n$ и M — правильное подмногообразие в G, то E_M дополняемо в $A(G)$* (Г. М. Хенкин [50]). Аналогичные положительные результаты получены и в L_p-метриках (см. статью [49] и библиографию в ней).

12. Следует сказать несколько слов о (не)дополняемости подпространств в случае линейных топологических пространств, в частности, пространств голоморфных функций; подробнее см. [27], предложения 14 и 15а; [29], §§ 4—5. Через $H(G)$ будем обозначать пространство голоморфных функций в области $G \subset \mathbf{C}^n$ с топологией равномерной сходимости на компактах $K \subset G$. Хотя техника анализа таких пространств существенно иная, чем в случае банаховых пространств голоморфных функций $A(G)$, основной результат о дополняемых подпространствах ([29], теорема 4.2) по форме тот же:

Если G — с. п. в. о. в $\mathbf{C}^n$ и M — правильное подмногообразие в G, то подпространство

$$I_M = \{f \in H(G)\colon f|M \equiv 0\}$$

дополняемо в $H(G)$.

Также *по форме* результатам А. Пелчинского [33] о дополняемых подпространствах в l_p аналогично следующее

1.9. Предложение. *В пространстве $H(D^n)$ любое дополняемое подпространство F изоморфно одному из координатных подпространств*

$$F_K = \{f \in H(D^n)\colon f = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} f_k z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n};\ f_k = 0,\ k \notin K\},$$

где K — подмножество $\mathbf{Z}_+^n$ мультииндексов. Более того, существует автоморфизм $A\colon H(D^n) \to H(D^n)$ такой, что $A|F\colon F \xrightarrow{\sim} F_K$ — изоморфизм.

Это — следствие (частный случай) предложения 14 [27]. Было бы интересно выяснить, верен ли аналог предложения 1.9 в случае $C^\infty(S^1)$ пространства всех бесконечно дифференцируемых функций на окружности? Здесь сказывается различие в конечных и бесконечных центрах гильбертовых шкал.

§ 2. Доказательство теоремы Дворецкого — Линденштраусса — Цафрири

Перейдем теперь к изложению доказательства следующего утверждения

2.0. Теорема. *Если в банаховом пространстве X всякое замкнутое подпространство дополняемо, то X изоморфно гильбертову пространству.*

Нам понадобится понятие расстояния по Банаху — Мазуру между двумя (изоморфными) банаховыми пространствами X и Y:

$$d(X, Y) = \inf \|T\| \|T^{-1}\|,$$

где T пробегает все изоморфизмы $T\colon X \xrightarrow{\sim} Y$ между X и Y. Если X и Y изометрически изоморфны, то $d(X, Y) = 1$. Для конечномерных пространств верно и обратное. Расстояние по Банаху — Мазуру удовлетворяет мультипликативному неравенству треугольника: $d(X, Z) \leqslant d(X, Y) d(Y, Z)$. (Подсчеты расстояния по Банаху — Мазуру для многих конкретных пар конечномерных пространств см. в работе В. И. Гурария, М. И. Кадеца, В. И. Мацаева [5].)

Доказательство теоремы 2.0 будет опираться на следующие предложения.

2.1. Предложение (теорема А. Дворецкого [10]). *Для любых $\varepsilon > 0$ и натурального n найдется $N = N(n, \varepsilon)$, обладающее следующим свойством: каково бы ни было N-мерное банахово пространство X, в нем существует n-мерное подпространство X_1, ε-изометричное n-мерному евклидову пространству, т. е. $d(X, l_2^n) < 1 + \varepsilon$.*

Это предложение доказано в [10]. Другое доказательство дано В. Д. Мильманом [24]; в нем существенно использованы геометрические оценки Т. Фигеля [45].

2.2. Предложение. *Пусть в бесконечномерном банаховом пространстве X существует последовательность конечномерных подпространств*

$\{Y_n\}_1^\infty$, *для которых* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(Y_n, X) = \infty$. *Тогда в* X *есть замкнутое подпространство без дополнения.*

Доказательство (принадлежащее Дину, Дэвису и Зингеру [8]) опирается на две простые леммы.

2.3. Лемма. *Пусть* X *— бесконечномерное банахово пространство, и* X_1 *— его конечномерное подпространство. Для любого* $\varepsilon > 0$ *в* X *найдется подпространство* Z *конечной коразмерности такое, что*

$$(*) \qquad \|x+z\| \geqslant (1-\varepsilon)\|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in X_1, \quad z \in Z.$$

Доказательство. Воспользовавшись компактностью единичной сферы подпространства X_1, выберем на ней конечную ε-сеть $\{x_k\}_1^M$. Для каждого x_k возьмем опорный линейный функционал $f_k \in X^*$, т. е. $f_k(x_k) = \|f_k\| = \|x_k\| = 1$ $(k = 1, \ldots, M)$. В качестве Z возьмем пересечение ядер этих линейных функционалов, т. е. $Z = \{z \in X\colon f_k(z) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant M\}$. Проверим выполнение условия $(*)$. Пусть $x \in X_1$; выберем в ε-сети тот элемент x_k, для которого выполнено неравенство $\|x - \|x\|x_k\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. Пусть $z \in Z$; тогда $\|x+z\| \geqslant \|\,\|x\|x_k + z\| - \|x - \|x\|x_k\| \geqslant f_k(\|x\|x_k + z) - \varepsilon\,\|x\| = (1-\varepsilon)\|x\|$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что коразмерность подпространства Z не превосходит M.

2.4. Лемма. *Пусть* Y *и* Z *— конечномерные подпространства банахова пространства* X, *причем* $Y \supset Z$, $\dim Y = n$, $\dim Z = m$. *Тогда*

$$(2.1) \qquad \lambda(Z, X) + 1 \geqslant \frac{\lambda(Y, X)+1}{(n-m)+1}.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем проектор $P\colon X \to z$ так, что $\|P\| < \lambda(Z, X) + \varepsilon$; положим $Z_1 = \operatorname{Ker} P$. По лемме Ауэрбаха (0.2) в пространстве Z_1 существует проектор Q на подпространство $Z_2 = Z_1 \cap Y$, норма которого не превосходит $(n-m)$. Построим теперь оператор R: $X \to Y$, действующий по формуле

$$Rx = Q(1-P)x + Px, \qquad x \in X.$$

Нетрудно убедиться в том, что R проектирует X на Y; при этом $\|R\| \leqslant \|Q\|(1 + \|P\|) + \|P\|$, откуда вытекает, что

$$\lambda(Z, X) + \varepsilon + 1 \geqslant \|P\| + 1 \geqslant \frac{\|R\| - \|Q\|}{\|Q\|+1} \geqslant \frac{\lambda(Y, X) - (n-m)}{(n-m)+1}.$$

Так как ε сколь угодно мало́, то мы получаем неравенство (2.1).

Замечание. Если в проведенных рассуждениях вместо леммы Ауэрбаха воспользоваться более сильным результатом Кадеца — Снобара [14] (см. выше неравенство (0.1)), то мы придем к оценке

$$\lambda(Z, X) \geqslant \frac{\lambda(Y, X)+1}{\sqrt{n-m}+1} - 1.$$

Для дальнейшего достаточно более элементарной оценки (2.1).

Доказательство предложения 2.2. Пусть $Z \subset X$ — какое-то подпространство конечной коразмерности. Рассмотрим последовательность подпространств $Y_i \cap Z$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где Y_i — подпространства, фигурирующие в условии предложения 2.2. Так как по лемме Ауэрбаха $\lambda(Y, X) \leqslant \dim Y$, но $\lambda(Y_i, X) \to \infty$, то $\dim Y_i \to \infty$, а поскольку $\dim (Y_i \cap Z) \geqslant \dim Y_i - \operatorname{codim} Z$, то и $\dim(Y_i \cap Z) \to \infty$. По лемме 2.4

$$\lambda (Y_i \cap Z, X) \geqslant \frac{\lambda (Y_i, X) - \operatorname{codim} Z}{\operatorname{codim} Z + 1} - 1,$$

так что $\lambda(Y_i \cap Z, X) \to \infty$.

После сделанных замечаний приступим к построению недополняемого подпространства $E \subset X$. Зафиксируем ε, $0 < \varepsilon < 1$, возьмем первое из подпространств $\{Y_i\}$ и обозначим его через E_1. По лемме 2.3 найдем подпространство E^1 конечной коразмерности такое, что $\|x + w\| \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\|$ для всех $x \in E_1$ и $w \in E^1$. В силу сделанных выше замечаний можно выбрать подпространство Y_{n_1} со столь большим индексом, что $\lambda(E_2, X) \geqslant 2$, где $E_2 = Y_{n_1} \cap E^1$. Натянув линейную оболочку на (непересекающиеся) подпространства E_1 и E_2, найдем (по лемме 2.3) подпространство $E^2 \subset E^1$, имеющее конечную коразмерность, и такое, что $\|x + w\| \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\|$ для всех $x \in E_1 \dot{+} E_2$ и $w \in E^2$. Выберем далее подпространство Y_{n_2} так, чтобы выполнялось неравенство $\lambda(E_3, X) \geqslant 3$, где $E_3 = Y_{n_2} \cap E^2$.

Продолжая описанную процедуру выбора, мы получим последовательность конечномерных подпространств $\{E_k\}_1^\infty$ и убывающую последовательность $\{E^k\}_1^\infty$ подпространств конечной коразмерности, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\lambda(E_k, X) \geqslant k; \quad E_n \subset E^k, \quad n > k; \tag{2.2}$$

$\|x + w\| \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\|$ для всех $x \in E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} \ldots \dot{+} E_k$ и $w \in E^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Подпространство $E \subset X$ определим как замыкание линейной оболочки подпространств E_k. Из последнего неравенства в (2.2) вытекает, что норма проектора P_k, отображающего E на $E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_k$ вдоль остальных E_n $(n > k)$, допускает оценку $\|P_k\| \leqslant (1 - \varepsilon)^{-1}$. Предположим, что E имеет дополнение в X, т. е. существует проектор Q: $X \to E$. Построим оператор $R_k = (1 - P_{k-1})P_k Q$; это проектор, отображающий X на E_k. Очевидно, что $\|R_k\| \leqslant \frac{2-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \|Q\|$ при всех k, но это противоречит первому из неравенств в (2.2). Поэтому построенное нами подпространство E не имеет дополнения в X.

2.5. Предложение. *Пусть в бесконечномерном банаховом пространстве X все конечномерные подпространства равномерно близки к евклидовым пространствам соответствующей размерности, т. е.*

$$d(B, l_2^n) \leqslant K < \infty, \quad B \subset X, \quad \dim B = n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где K — постоянная, от B не зависящая. Тогда X изоморфно гильбертову пространству.

Доказательство. Сначала предположим, что X сепарабельно. Выделим в X возрастающую цепочку конечномерных подпространств так, что

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots, \quad \dim X_n = n, \quad \overline{\bigcup X_n} = X.$$

По условию в каждом из подпространств X_n можно определить евклидову норму $\|x\|_n$ так, что $\|x\| \leqslant \|x\|_n \leqslant K\|x\|$ для всех $x \in X_n$. Поэтому на единичном шаре S_m пространства X_m функции-нормы $\|x\|_n$, $n \geqslant m$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, так что для любого m можно выбрать подпоследовательность $\{n_j^m\}$ такую, что существует $\lim\limits_{j\to\infty} \|x\|_{n_j^m}$ для всех $x \in X_m$. Применяя диагональный процесс, мы сможем выбрать подпоследовательность $\|x\|_{n_j}$, сходящуюся на всех элементах $x \in \bigcup X_m$; положим тогда

$$|||x||| = \lim_{j\to\infty} \|x\|_{n_j}, \quad x \in \bigcup X_m.$$

При этом очевидно, что

$$\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant K\|x\|, \qquad x \in \bigcup X_m,$$

и новая норма является гильбертовой. Остается распространить ее по непрерывности на все пространство X.

Для несепарабельных X предложение доказывается аналогично с использованием трансфинитной индукции.

Это предложение, по существу, доказано И. Линденштрауссом [20]; см. также [11] и [12].

Теперь можно перейти к доказательству теоремы 2.0. Мы выделим всю техническую часть в лемму 2.6 ниже, а основное неравенство (2.4), имеющее самостоятельное значение,— в предложение 2.7. После этого доказательство теоремы сведется к цепочке простых импликаций.

2.6. Лемма. *Пусть G — $2n$-мерное банахово пространство, и $G = B \dot{+} C$, $\dim B = \dim C = n$. Пусть P проектирует G на B вдоль C, $Q = 1 - P$, $\|P\| = p$, $\|Q\| = q$. Пусть $T\colon B \to l_2^n$ и $S\colon C \to l_2^n$ — изоморфизмы, реализующие расстояния Банаха — Мазура; положим $b = \|T\|\cdot\|T^{-1}\|$, $c = \|S\|\cdot\|S^{-1}\|$. Пусть $D = \{x + S^{-1}Tx\colon x \in B\} \subset G$, и $r = \lambda(D, G)$. Тогда*

$$b \leqslant 4pqcr^2. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть R — проектор из G на D, реализующий проекционную постоянную, т. е. $\|R\| = r$. Представим $2n$-мерное евклидово пространство l_2^{2n} в виде ортогональной суммы двух n-мерных компонент: $l_2^{2n} = l_2^n \oplus l_2^n$ и отобразим в него подпространство B с помощью отображения $\widetilde{T}$, определяемого по формуле

$$\widetilde{T}x = \{Tx;\ \mu^{1/2}SQRx\}, \qquad x \in B,$$

где параметр μ будет выбран в дальнейшем. Тогда

$$\|\widetilde{T}x\| = (\|Tx\|^2 + \mu\|SQRx\|^2)^{1/2} \leqslant (\|T\|^2 + \mu\|S\|^2q^2r^2)^{1/2}\cdot\|x\|.$$

Для оценки нормы $\|\widetilde{T}x\|$ снизу воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$Tx = SQRx + TPRS^{-1}Tx, \qquad x \in B.$$

С его помощью получаем неравенство

$$\|\widetilde{T}x\| = (\|Tx\|^2 + \mu\|Tx - TPRS^{-1}Tx\|^2)^{1/2} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{\|PRS^{-1}Tx\|^2}{\|PRS^{-1}\|^2} + \frac{\mu}{\|T^{-1}\|^2}\|x - PRS^{-1}Tx\|^2\right)^{1/2}.$$

Тогда по неравенству Коши — Буняковского

$$\|\widetilde{T}x\| \geqslant \frac{\|PRS^{-1}Tx\| + \|x - PRS^{-1}Tx\|}{(\|PRS^{-1}\|^2 + \mu^{-1}\|T^{-1}\|^2)^{1/2}} \geqslant \frac{\|x\|}{(p^2r^2\|S^{-1}\|^2 + \mu^{-1}\|T^{-1}\|^2)^{1/2}}.$$

Последнее соотношение показывает, что отображение $\widetilde{T}$ инъективно и, значит, осуществляет изоморфизм между B и $\widetilde{T}B \subset l_2^{2n}$, подпространством в l_2^{2n}. Нормы этого изоморфизма и обратного к нему допускают, как мы показали выше, оценку

$$\|\widetilde{T}\| \leqslant (\|T\|^2 + \mu\|S\|^2q^2r^2)^{1/2}, \qquad \|\widetilde{T}^{-1}\| \leqslant (p^2r^2\|S^{-1}\|^2 + \mu^{-1}\|T^{-1}\|^2)^{1/2}.$$

Так как любое подпространство евклидова пространства также является евклидовым, то

$$b = d(B, l_2^n) \leqslant \|\widetilde{T}\| \cdot \|\widetilde{T}^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\left(\frac{\|T\|}{\|S\|}\right)^2 (prc)^2 + \left(\frac{\|S\|}{\|T\|}\right)^2 (qrb)^2 + \mu(pqr^2c)^2 + \frac{1}{\mu}b^2\right\}^{1/2}.$$

Минимизируя правую часть этого соотношения по переменным $\|T\|/\|S\|$ и μ, получаем: $b \leqslant 2r(pqbc)^{1/2}$, откуда и следует неравенство (2.3).

2.7. Предложение. *Для любого бесконечномерного банахова пространства X и любого натурального n справедливо неравенство*

$$\sup_B d(B, l_2^n) \leqslant 8[\sup_B \lambda(B, X)]^2, \tag{2.4}$$

где в обеих частях B пробегает все n-мерные подпространства в X.

Доказательство. Зафиксируем n-мерное подпространство $B \subset X$. На основании леммы 2.1 выделим в X конечномерное подпространство Y так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x + y\| \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in B, \quad y \in Y, \tag{2.5}$$

и тем самым неравенство

$$\|x + y\| \geqslant \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\|y\| \quad \text{для всех } x \in B,\ y \in Y. \tag{2.5a}$$

Размерность Y возьмем настолько большой, чтобы в Y согласно предложению 2.1 можно было выбрать n-мерное подпространство C такое, что $d(C, l_2^n) \leqslant 1 + \varepsilon$. Пусть $G = B \dotplus C$; повторим построения, описанные в лемме 2.3 и воспользуемся оценкой (2.3). При этом в силу неравенств (2.5), (2.5a) $p \leqslant (1 - \varepsilon)^{-1}$, $q \leqslant 2(1 - \varepsilon)^{-1}$, и $c \leqslant 1 + \varepsilon$ по выбору C; поэтому

$$d(B, l_2^n) \leqslant 4 \cdot (1 - \varepsilon)^{-1} \cdot 2(1 - \varepsilon)^{-1} \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \lambda^2(D, X).$$

Если теперь в обеих частях этого неравенства взять верхнюю грань по всем n-мерным подпространствам (B и D) в X, а затем устремить ε к нулю, то мы получим неравенство (2.4).

Доказательство теоремы 2.0. Предположим, что в бесконечномерном банаховом пространстве X всякое замкнутое подпространство имеет дополнение. Тогда в силу предложения 2.2 для всех конечномерных подпространств справедлива оценка

$$\lambda(B, X) \leqslant K < \infty, \quad B \subset X, \quad \dim B < \infty,$$

где K — постоянная, от B не зависящая. Тогда в силу предложения 2.7 все конечномерные подпространства равномерно близки к евклидовым пространствам соответствующей размерности, точнее,

$$(2.6) \qquad d(B, l_2^n) \leqslant 8K^2, \ B \subset X, \ \dim B = n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Наконец, из предложения 2.5 вытекает, что X изоморфно гильбертову пространству. Теорема полностью доказана.

Замечание. Интересно выяснить, можно ли в неравенстве (2.3) (и (2.4)) коэффициент 4 (8) заменить на единицу. Положительное решение этого вопроса давало бы, в частности, доказательство известной теоремы Какутани [15]: *если в банаховом пространстве* X, $\dim X \geqslant 3$, *всякое замкнутое подпространство имеет ортогональное дополнение, то* X *изометрически изоморфно гильбертову пространству.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, S. Mazur, Zur Theorie der linearen Dimension, Studia Math. 4 (1933), 100—112.
[2] К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
[3] B. Grünbaum, Projections onto some function spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 316—324.
[4] В. И. Гурарий, О некоторых геометрических характеристиках подпространств и базисов в банаховых пространствах, Colloq. Math. 13:1 (1964), 59—63.
[5] В. И. Гурарий, М. И. Кадец, В. И. Мацаев, О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p, Матем. сб. 70:4 (1966), 481—489.
[6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы; общая теория, том 1, М., ИЛ, 1962.
[7] И. К. Даугавет, Некоторые приложения обобщенного тождества Марцинкевича — Бермана, Вестник ЛГУ, сер. матем. и мех. 19:4 (1968), 59—64.
[8] W. J. Davis, D. W. Dean, I. Singer, Complemented subspaces and Λ-systems in Banach spaces, Isr. J. Math. 6 (1968), 303—309.
[9] A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donnè, Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble 16:1 (1966), 1—95.
[10] A. Dvoretzky, Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 1961, 123—160 (русский перевод: Сб. перев.: Математика 8:1 (1964), 73—102).
[11] A. Dvoretzky, A characterization of Banach spaces isomorphic to inner product spaces, Proc. Coll. Convexity, Univ. of Copenhagen, 1966, 61—66.
[12] J. T. Joichi, Normed linear spaces equivalent to inner-product spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 423—426.
[13] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, том 1, М., «Мир», 1965.
[14] М. И. Кадец, М. Г. Снобар, О некоторых функционалах на компакте Минковского, Матем. заметки 10:4 (1971), 453—458.
[15] S. Kakutani, Some characterizations of Euclidean spaces, Jap. J. Math. 16 (1939), 93—97.
[16] G. Köthe, Topologische lineare Räume. I, Springer—Verlag, 1960.

[17] H. Komatuzaki, Sur les projections dans certaines espaces du type (B), Proc. Imp. Acad. Tokyo **16** (1940), 274—279.

[18] H. Komatuzaki, Une remarque sur les projections des certaines espaces du type (B), Proc. Imp. Acad. Tokyo **17** (1941), 238—240.

[19] M. Kuranishi, On the locally complete families of complex analytic structures, Ann. of Math. **75**:3 (1962), 536—577.

[20] J. Lindenstrauss, On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, Mich. Math. J. **10** (1963), 241—252.

[21] J. Lindenstrauss, On complemented subspaces of m, Isr. J. Math. **5** (1967), 153—156.

[22] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, Contribution to the theory of the classical Banach spaces, J. Funct. Anal. (1973).

[23] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, On the complemented subspaces problem, Isr. J. Math. **9** (1971), 263—269.

[24] В. Д. Мильман, Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечениях выпуклых тел, Функц. анализ **5**:4 (1971), 28—37.

[25] В. Д. Мильман, Линии уровня функций на многомерных комплексных однородных пространствах, УМН **27**:4 (1972), 219—220.

[26] Б. С. Митягин, Об изоморфизмах пространств гладких и голоморфных функций, Дополнение II в русском переводе [35].

[27] Б. С. Митягин, Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах, Studia Math. **37**:2 (1971), 111—137.

[28] Б. С. Митягин, О мультипликаторах-идемпотентах в симметрических функциональных пространствах, Функц. анализ **6**:3 (1972), 81—82.

[29] Б. С. Митягин, Г. М. Хенкин, Линейные задачи комплексного анализа, УМН **26**:4 (1971), 93—152.

[30] E. W. Cheney, C. R. Hobby, P. D. Morris, F. Schurer and D. E. Wulbert, On the minimal Property of the Fourier Projection, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 249—258.

[31] F. J. Murrey, On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 138—152.

[32] D. J. Newman, The non-existence of projection from L^1 to H^1, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961).

[33] A. Pełczyński, Projections in certain Banach spaces, Studia Math. **19** (1960), 209—228.

[34] A. Pełczyński, On simultaneous extension of continuous functions, Studia Math. **24** (1964), 285—304; Supplement **25** (1965), 157—161.

[35] A. Pełczyński, Linear extensions, linear averagings, and their applications..., Panstwowe wydawn. naukowe, Warszawa, 1968 (русский перевод: А. Пелчинский, Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения, М., «Мир», 1970).

[36] А. Пелчинский, Т. Фигель, О методе Энфло построения банаховых пространств без свойства аппроксимации, УМН **28**:6 (1973), 95—108.

[37] A. Pietsch, Nukleare lokalkonvexe Räume, Akademie-Verlag, Berlin, 1965 (русский перевод: А. Пич, Ядерные локально выпуклые пространства, М., «Мир», 1967).

[38] H. P. Rosenthal, Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$, Memoirs Amer. Math. Soc. **63** (1966), 1—84.

[39] W. Rudin, Projection on invariant subspaces, Proc. Amer. Math. Soc. **13**:3 (1962), 429—432.

[40] W. Rudin, Boundary values of continuous analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 808—811.

[41] D. Rutovitz, Some parameters associated with finitedimensional Banach spaces, J. London Math. Soc. **40**:2 (1965), 241—255.

[42] A. Sobczyk, Projections in Minkowski and Banach spaces, Duke Math. J. **8** (1941), 78—106.

[43] C. F e f f e r m a n, The multiplier problem for the ball, Ann. of Math. 94:2 (1971), 330—336 (русск. перев.: Сб. «Математика» 18 : 1 (1974).

[44] G. F i c h t e n h o l z et L. K a n t o r o v i t c h, Sur les operations dans l'espace des fonctions bornées, Studia Math. 5 (1934), 69—98.

[45] T. F i g i e l, Some remarks on Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies, Colloq. Math. 24:2 (1972), 241—252.

[46] R. S. P h i l l i p s, On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 516—541.

[47] H. H e l s o n, Note on harmonic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 686—691.

[48] Г. М. Х е н к и н, Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных ($n \geqslant 2$), Матем. сб. 74:4 (1967), 595—606.

[49] Г. М. Х е н к и н, Интегральные представления функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях, и некоторые приложения, Матем. сб. 78:4 (1969), 611—632.

[50] Г. М. Х е н к и н, Продолжение ограниченных голоморфных функций с подмногообразий общего положения в строго псевдовыпуклой области, Изв. АН СССР, сер. матем. 36:3 (1972), 540—567.

[51] L. S c h w a r t z, Analyse et synthese harmoniques dans les espaces de distributions, Canadian J. Math. 3:4 (1951), 503—512.

Поступило в редакцию 13 августа 1973 г.