Математические заметки

том 61 выпуск 5 май 1997

УДК 517

О РАСШИРЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ДО ИНВОЛЮТИВНОГО

М. И. Кадец, К. Э. Каибханов

Линейный ограниченный оператор $A\colon X \to X$ в линейно-топологическом пространстве X назовем p-инволютивным, $p \geqslant 2$, если $A^p = I$, где I – тождественный оператор. В статье дано описание линейных p-инволютивных операторов в линейно-топологическом пространстве над полем $\mathbb{C}$; доказана возможность расширения линейного оператора до инволютивного.

Библиография: 1 название.

Основной целью настоящей работы является доказательство возможности расширения линейного оператора до инволютивного.

Линейный ограниченный оператор $A\colon X \to X$ в линейно-топологическом пространстве X назовем *p-инволютивным*, $p \geqslant 2$, если $A^p = I$, где I – тождественный оператор; при $p = 2$ будем говорить просто инволюция. Договоримся все линейные операторы считать ограниченными. Простейшими примерами линейных p-инволютивных операторов в линейно-топологическом пространстве X над полем $\mathbb{C}$ являются операторы вида $A = e^{2\pi ki/p}I$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$. Следующее утверждение показывает, что, по существу, этим набором и исчерпывается множество таких операторов.

Теорема 1. *Пусть $A\colon X \to X$ – линейный p-инволютивный оператор в линейно-топологическом пространстве X над полем $\mathbb{C}$. Положим $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$. Тогда существуют подпространства $X_1, X_2, \dots, X_p$ пространства X такие, что*

1) $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_p$;
2) $A|_{X_k} = \varepsilon^k I|_{X_k}$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

Доказательство. Рассмотрим операторы

$$Q_k = \frac{1}{p}\biggl(\sum_{j=0}^{p-1}(\varepsilon^{p-k}A)^j\biggr), \qquad 1 \leqslant k \leqslant p;$$

при этом считаем $A^0 = I$. Непосредственно проверяется, что Q_k – проекторы (т.е. $Q_k^2 = Q_k$). Положим $X_k = Q_k(X)$. Нетрудно проверить, что X_k обладают требуемыми свойствами.

Отметим, что при $p = 2$ эта теорема справедлива и для пространств над полем $\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть* $A\colon X \to X$ – *линейный оператор в линейно-топологическом пространстве* X (*над полем* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$) *и* $p \geqslant 2$. *Тогда существуют линейно-топологическое пространство* Z, *содержащее* X *дополняемым образом с оператором проектирования* $P\colon Z \to X$, *и линейный* p*-инволютивный оператор* $B\colon Z \to Z$ *такие, что* $PB|_X = A$.

Доказательство. Пусть $X_2, X_3, \dots, X_p$ – экземпляры пространства X, $X_1 = X$, и $U_k\colon X \to X_k$ – канонические изометрии, $U_1 = I|_X$. Образуем прямую сумму $Z = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_p$. Пусть $Q_k\colon Z \to X_k$ – канонические проекторы. Определим операторы

$$V_1 = U_2U_1^{-1}Q_1, \quad V_2 = U_3U_2^{-1}Q_2, \quad \dots, \quad V_{p-1} = U_pU_{p-1}^{-1}Q_{p-1}, \quad V_p = U_1U_p^{-1}Q_p,$$
$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_p.$$

Определим, далее, оператор $S\colon Z \to X$:

$$S = U_2^{-1}Q_2 + U_3^{-1}Q_3 + \dots + U_p^{-1}Q_p.$$

Образуем изоморфизм $T = I + AS$. Непосредственно проверяется, что $T^{-1} = I - AS$. Наконец, определим оператор $B\colon Z \to Z$, обладающий требуемыми свойствами, положив $B = TVT^{-1}$ (при этом $P = Q_1$).

Обратимся к случаю гильбертова пространства. Естественным образом, возникает вопрос о наилучшем в смысле нормы выборе оператора B в теореме 2. Проведенное выше доказательство при $p = 2$ дает оценку $\|B\| \leqslant (1+\|A\|)^2$. Следующее утверждение показывает, что эта оценка может быть улучшена.

Теорема 3. *Для любого линейного оператора* $A\colon H \to H$ *в гильбертовом пространстве* H (*над полем* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$) *существуют гильбертово пространство* $E \supset H$ *и линейная инволюция* $B\colon E \to E$ *такие, что*

1) $PB|_H = A$, *где* $P\colon E \to H$ – *оператор ортогонального проектирования*;
2) *имеет место оценка*

$$\|B\| \leqslant \begin{cases} \sqrt{\dfrac{17+4\sqrt{2}}{2}}, & \text{если } \|A\| \leqslant \sqrt{2}; \\ \sqrt{4\|A\|^2 + \dfrac{1}{\|A\|^2} + 2\sqrt{2}}, & \text{если } \|A\| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Мы докажем эту теорему для случая бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства над полем $\mathbb{R}$, но доказательство переносится и на другие случаи. Для доказательства теоремы 3 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Примем обозначения: $\langle x, y\rangle$ – скалярное произведение элементов x и y; $[x_j]_{j=1}^{\infty}$ – замыкание линейной оболочки, натянутой на $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Пусть $A\colon H \to H$ – линейный оператор в гильбертовом пространстве H, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H; обозначим $g_j = Ae_j$. Пусть F – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. Образуем гильбертово пространство $Z = (H \oplus F)_2$ с естественным скалярным произведением ($\langle e_j, f_k\rangle = 0$); и пусть $Q\colon Z \to H$ – естественный проектор. Если $h \in Z$, то мы иногда будем писать $h = (e, f)$, имея в виду, что $e \in H$, $f \in F$. Положим $h_j = (g_j, tf_j) \in (H \oplus F)_2$, где $t > 0$ (подбором нужного t займемся ниже). Обозначим $[h_j]_{j=1}^{\infty} = Y$.

Лемма 1. *$\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ – базис в Y, эквивалентный базису $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ в H.*

Доказательство. Для произвольной системы чисел $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеем

$$\begin{aligned} t^2\biggl(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\biggr) &= \sum_{j=1}^{\infty} t^2 a_j^2 \leqslant \biggl\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j\biggr\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} t^2 a_j^2 \\ &= \biggl\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j\biggr\|^2 = \biggl\|\biggl(\sum_{j=1}^{\infty} a_j A e_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_j t f_j\biggr)\biggr\|^2 \\ &= \biggl\|A\biggl(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\biggr)\biggr\|^2 + t^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \\ &\leqslant \|A\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 + t^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = (\|A\|^2 + t^2) \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2. \end{aligned}$$

Лемма 2. *Для любых $e \in H$ и $h \in Y$ имеет место неравенство*

$$|\langle e, h\rangle| \leqslant \frac{\|A\| \cdot \|e\| \cdot \|h\|}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}. \tag{1}$$

Доказательство. Принимая $h = (g, f) \in (H \oplus F)_2$, $g = \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j$, будем иметь

$$\begin{aligned} |\langle e, h\rangle| &= |\langle e, g\rangle| \leqslant \|e\| \cdot \|g\| = \frac{\|e\| \cdot \|g\| \cdot \|h\|}{\|h\|} \\ &= \frac{\|e\| \cdot \bigl\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j\bigr\| \cdot \|h\|}{\sqrt{\bigl\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j\bigr\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} t^2 a_j^2}} \leqslant \frac{\|A\| \cdot \|e\| \cdot \|h\|}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}. \end{aligned}$$

Лемма 3. *Для любых $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и любого $h \in Y$*

$$\biggl\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + h\biggr\| \geqslant \frac{\bigl\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\bigr\| t}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}. \tag{2}$$

Доказательство. Для краткости обозначим

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j = e.$$

Тогда, обращаясь к (1), получим

$$\begin{aligned} \|e + h\|^2 &= \|e\|^2 + 2\langle e, h\rangle + \|h\|^2 \\ &= \|e\|^2 \biggl[\biggl(\frac{\|h\|}{\|e\|} - \frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}\biggr)^2 + \frac{t^2}{\|A\|^2 + t^2}\biggr] \geqslant \frac{\|e\|^2 t^2}{\|A\|^2 + t^2}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Лемма 4. *Множество* $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ *образует базис в* Z *после естественной перенумерации*: $e_1, h_1, e_2, h_2, \dots$.

Доказательство. Пусть $x \in Z$ произвольно и

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k.$$

Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k\right) + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k.$$

Так как

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k \in H,$$

то существуют числа $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которых

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k = \sum_{j=1}^{\infty} d_j e_j.$$

Следовательно,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty}(a_j - d_j)e_j + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k,$$

т.е. x разлагается по элементам множества $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем коэффициенты в разложении определяются однозначно. Осталось доказать, что существует такое $C > 0$, что для любых $n, m, l, s \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство [1, предложение 1.a.3]:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l+s} b_k h_k\right\| \geqslant C\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l} b_k h_k\right\|.$$

Ясно, что достаточно доказать это неравенство при

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l} b_k h_k\right\| = 1.$$

Для краткости обозначим

$$e = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \qquad h = \sum_{k=1}^{l} b_k h_k.$$

Пусть $\|e + h\| = 1$. Тогда имеет место, по крайней мере, один из следующих случаев: 1) $\|e\| \geqslant 1/2$; 2) $\|h\| \geqslant 1/2$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $\|e\| \geqslant 1/2$. Пользуясь (2), будем иметь

$$\left\|\sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l+s} b_k h_k\right\| \geqslant \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j\right\| t}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}} \geqslant \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right\| t}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}} \geqslant \frac{t}{2\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}.$$

2) $\|h\| \geqslant 1/2$. Имеем

$$\|h\| = \Big\|\sum_{k=1}^{l} b_k h_k\Big\| = \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{l} b_k g_k, t\sum_{k=1}^{l} b_k f_k\Big)\Big\| = \sqrt{\Big\|\sum_{k=1}^{l} b_k g_k\Big\|^2 + t^2\sum_{k=1}^{l} b_k^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Так как $\|g_k\| \leqslant \|A\|$, то отсюда следует

$$\sqrt{\|A\|^2+t^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{l} b_k^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

и

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{l} b_k^2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\|A\|^2+t^2}}.$$

Поэтому

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l+s} b_k h_k\Big\| \geqslant t\sqrt{\sum_{k=1}^{l+s} b_k^2} \geqslant t\sqrt{\sum_{k=1}^{l} b_k^2} \geqslant \frac{t}{2\sqrt{\|A\|^2+t^2}}.$$

Таким образом, в каждом из этих случаев можно взять $C = t/\big(2\sqrt{\|A\|^2+t^2}\,\big)$.

Доказательство теоремы 3. 1) Положим $E = Z$. Согласно лемме 4 $E = Z = H \oplus Y$. Определим оператор $B : E \to E$ следующим образом:

$$B\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j.$$

Так как базисы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ эквивалентны, то оператор B определен корректно. Положим $P = Q$. Для произвольного

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in H$$

имеем

$$PBx = PB\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\Big) = P\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j\Big) = P\bigg(\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_j t f_j\Big)\bigg)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j A e_j = A\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\Big) = Ax,$$

т.е. $PB|_H = A$, и часть 1) теоремы 3 доказана.

2) Оценим $\|B\|$. Пусть

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k\Big\| = 1.$$

Тогда согласно (2)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\Big\|^2 \leqslant \frac{\|A\|^2 + t^2}{t^2}. \tag{3}$$

Имеем

$$\sqrt{t^2 \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2} \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k\Big\| = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leqslant \frac{1}{t^2}. \tag{4}$$

Пользуясь (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}
&\Big\|B\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k\Big)\Big\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j\Big\|^2 \\
&\quad = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j\Big\|^2 + t^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \leqslant \Big(\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\Big\| + \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j\Big\|\Big)^2 + t^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \\
&\quad \leqslant \Big(\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} + \|A\|\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2}\Big)^2 + \|A\|^2 + t^2 \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + 2\|A\|\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2} + \|A\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 + \|A\|^2 + t^2 \\
&\quad \leqslant \frac{1}{t^2} + \frac{2\|A\|\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}{t^2} + \frac{\|A\|^2(\|A\|^2 + t^2)}{t^2} + \|A\|^2 + t^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|B\|^2$ не больше последнего выражения этой цепочки неравенств. Рассмотрим два случая: а) $\|A\| \leqslant \sqrt{2}$ и б) $\|A\| > \sqrt{2}$.

а) $\|A\| \leqslant \sqrt{2}$. Положим $t = \sqrt{2}$. Тогда получим

$$\|B\| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} + 8} = \sqrt{\frac{17 + 4\sqrt{2}}{2}}.$$

б) $\|A\| > \sqrt{2}$. В этом случае положим $t = 1$. Тогда, как легко проверить,

$$\|B\| \leqslant \sqrt{4\|A\|^2 + \frac{1}{\|A\|^2} + 2\sqrt{2}}.$$

Теорема 3 доказана.

Харьковская государственная академия городского хозяйства
Таганрогский радиотехнический университет

Поступило
13.07.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces. Berlin: Springer, 1977.