МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ НОРМИРУЕМОСТИ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ

В. М. Кадец, М. И. Кадец

Введение. В последнее время появился ряд работ, посвященных перенесению на линейные метризуемые пространства известной теоремы Джеймса о рефлексивности банахова пространства (библиографию см. в [1]). Д. Н. Зарнадзе [1] среди других результатов этого направления сформулировал интересное утверждение, связывающее нормируемость пространства Фреше с наличием в нем некоторой непрерывной нормы. К сожалению, его доказательство оказалось неверным.

Цель настоящей статьи — доказать утверждение Д. Н. Зарнадзе, освободив его одновременно от лишних допущений (теорема 1), доказать двойственное, в некотором смысле, утверждение (теорема 2) и привести примеры, показывающие, что теоремы 1 и 2 не распространяются на полные не метризуемые локально выпуклые пространства.

1. Определения и вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1 [2, с. 57]. *Пусть X — полное метрическое пространство, Y — метрическое пространство, u — непрерывное отображение X в Y. Пусть, далее, для каждого $r > 0$ найдется $\rho > 0$ такое, что для любого $x \in X$ образ замкнутого шара $B_r(x)$ радиуса r с центром в x плотен в шаре $B_\rho(u(x))$. Тогда для любого $a > r$ справедливо включение $u(B_a(x)) \supset B_\rho(u(x))$.*

Определение 1. Подмножество R единичной сферы $S(E)$ рефлексивного банахова пространства E называется границей, если для каждого линейного функционала $f \in E'$ найдется $x \in R$ такой, что $f(x) = \|f\|$.

Заметим, что, в силу известной теоремы Джеймса (см. [3, с. 16]) о линейных функционалах, достигающих нормы, понятие границы может быть введено только для рефлексивных пространств.

ЛЕММА 2 [4]. *Если граница R рефлексивного банахова пространства E покрыта возрастающей последовательностью абсолютно выпуклых замкнутых множеств, то хотя бы одно из них имеет непустую внутренность.*

ЛЕММА 3. *Пусть X — пространство Фреше, а Y — рефлексивное банахово пространство с границей R. Пусть T — линейный непрерывный оператор из X в Y и $T(X) \supset R$. Тогда T — сюръекция.*

Доказательство. Пусть на X задана метрика, определяющая топологию, и B_r — шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Пусть $V \subset B_r$ — выпуклая окрестность нуля в X_∞. Тогда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$. Так как по условию леммы $T(X) \supset R$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} T(nV) \supset R$. Следовательно, по лемме 2 замыкание множества $T(V)$ имеет непустую внутренность, а значит, множество $T(B_r)$ плотно в некотором шаре пространства Y. Так как r было взято произвольным, то по лемме 1 множество $T(B_r)$ содержит некоторый шар пространства Y, т. е. T — сюръекция.

В случае, когда X — банахово пространство, это предложение было доказано в [5, теорема 1].

Определение 2. Пусть V — замкнутое абсолютно выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X; $p(\cdot)$ — полунорма, порожденная множеством V в его линейной оболочке $\mathrm{Lin}\, V$. Линейный функционал $f \in X'$ будем называть достигающим для точки $x \in \mathrm{Lin}\, V$ (и обозначать его f_x), если $f_x(x) = p(x)$, а $f_x(y) \leqslant p(y)$ для всех $y \in \mathrm{Lin}\, V$. Алгебраической границей ∂V множества V назовем множество тех $x \in V$, для которых $p(x) = 1$. Точку $x \in \partial V$ будем называть достижимой, если для нее существует достигающий функционал f_x. Если множество V имеет непустую внутренность, то по теореме Хана — Банаха все точки его границы ∂V достижимы.

2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — пространство Фреше и $p(\cdot)$ — непрерывная норма на X, удовлетворяющая следующему условию (J): каждый линейный функционал $f \in X'$,* *ограниченный на множестве*

$$U_p = \{x \in X: p(x) \leqslant 1\},$$

достигает на нем своей верхней грани. Тогда $p(\cdot)$ порождает исходную топологию на X, которое, таким образом, оказывается изоморфным рефлексивному пространству Банаха.

Доказательство. Введем в рассмотрение пространство Y — пополнение пространства X по норме $p(\cdot)$. Обозначим через T тождественное вложение X в Y. Так как норма $p(\cdot)$ непрерывна, то T — непрерывная инъекция. Так как $p(\cdot)$ удовлетворяет условию (J), то то теореме Джеймса [3] Y рефлексивно, а $T(X)$ содержит некоторую границу в пространстве Y. Следовательно, по лемме 3, оператор T — сюръекция. Тогда, согласно теореме Банаха об обратном операторе, T — изоморфизм между пространством Фреше X и рефлексивным пространством Банаха Y. Теорема доказана.

Перейдем к доказательству двойственного утверждения, которое, в некотором смысле, является обратным к теореме Хана — Банаха.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X — пространство Фреше; V — замкнутое, ограниченное, абсолютно выпуклое множество, линейная оболочка которого плотна в X. Пусть V удовлетворяет следующему условию (J^*): каждая точка его алгебраической границы является достижимой. Тогда V — окрестность нуля в X, определяющая исходную топологию на X, которое, таким образом, оказывается изоморфным пространству Банаха.*

Доказательство. Пусть $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$, ... — возрастающая последовательность полунорм, определяющая топологию пространства X. Обозначим через $p(\cdot)$ полунорму, порожденную множеством V на $\mathrm{Lin}\, V$. Допустим, что V имеет пустую внутренность (т. е. не является окрестностью). Это значит, что для любой из полунорм, определяющих в совокупности топологию, $\inf\{p_n(x): x \in \partial V\} = 0$. Возьмем элемент $e_1 \in \partial V$ такой, что $p_1(e_1) \leqslant 4^{-1}$. Возьмем коэффициент $a_1 = (1 + 2^{-1})^{-1}$; тогда $p(a_1 e_1) = (1 + 2^{-1})^{-1}$. Рассмотрим замкнутое подпространство коразмерности один $X_1 = \ker f_{e_1}$. Ясно, что $\mathrm{Lin}\, V \cap X_1$ плотно в X_1, а $V \cap X_1$ имеет пустую внутренность. Поэтому можно выбрать элемент $e_2 \in \partial V$ так, что $f_{e_1}(e_2) = 0$ и $p_2(e_2) \leqslant 4^{-2}$. Согласно неравенству треугольника

$$\max\{p(a_1e_1+e_2),\ p(a_1e_1-e_2)\}\geqslant 1.$$

Так как $p(a_1e_1)=(1+2^{-1})^{-1}$, мы можем выбрать коэффициент a_2, $-1<a_2<1$, так, чтобы удовлетворить равенству

$$p(a_1e_1+a_2e_2)=(1+2^{-2})^{-1}.$$

Рассмотрим замкнутое подпространство коразмерности два

$$X_2=\operatorname{Ker} f_{e_1}\bigcap \operatorname{Ker} f_{a_1e_1+a_2e_2}.$$

Исходя из тех же соображений, что и в случае X_1, мы можем выбрать элемент $e_3\in\partial V$ так, что $f_{e_1}(e_3)=$ $=f_{a_1e_1+a_2e_2}(e_3)=0$ и $p_3(e_3)\leqslant 4^{-3}$. В этом случае опять

$$\max\{p(a_1e_1+a_2e_2+e_3),\ p(a_1e_1+a_2e_2-e_3)\}\geqslant 1$$

и мы можем выбрать коэффициент a_3, $-1<a_3<1$, так, чтобы удовлетворить равенству

$$p(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)=(1+2^{-3})^{-1}.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность элементов $\{e_n\}_1^\infty$ и коэффициентов $\{a_n\}_1^\infty$. Введя обозначение $s_n=\sum_{k=1}^n a_ke_k$, мы можем так записать свойства выделенных последовательностей:

$$|a_n|<1,\ \ p(e_n)=1,\ \ p_n(e_n)\leqslant 4^{-n};$$
$$f_{s_k}(e_n)=0\ (1\leqslant k<n),$$
$$p(s_n)=(1+2^{-n})^{-1},\quad n=1,2,\ldots$$

Отсюда следует, в частности, что ряд $\sum_{n=1}^\infty a_ne_n$ сходится в топологии пространства X, и, в силу замкнутости V, его сумма s принадлежит множеству V: $p(s)\leqslant 1$. Из определения функционалов f_{s_n} получаем следующие неравенства:

$$p(s)\geqslant f_{s_n}(s)=f_{s_n}(s_n)=p(s_n)=(1+2^{-n})^{-1},$$
$$n=1,2,\ldots$$

Следовательно, $p(s)=1$, т. е. $s\in\partial V$. Докажем теперь, что s — недостижимая точка множества V. Возьмем произвольный линейный функционал $f\in X'$ такой, что $f(s)>0$. Образуем невозрастающую последовательность величин

$$p_n(f) = \sup\{f(x):\ x \in X,\ p_n(x) \leqslant 1\}.$$

Пусть n_0 — тот индекс, начиная с которого $p_n(f) < \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p_{n_0}(f) = 1$. Возьмем $m \geqslant n_0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$f(s_m) > \frac{1}{2} f(s) > 2^{-m}. \tag{1}$$

Определим элемент $y \in \partial V$ следующим образом:

$$y = s_m/p(s_m) = (1 + 2^{-m})\, s_m. \tag{2}$$

Сравним значения $f(s)$ и $f(y)$:

$$f(s) = f(s_m) + \sum\nolimits_{k=m+1}^{\infty} a_k f(e_k) \leqslant$$

$$\leqslant f(s_m) + \sum\nolimits_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \cdot p_k(f) \cdot p_k(e_k),$$

а так как $|a_k| < 1$, $p_k(f) \leqslant p_{n_0}(f) = 1$, $\sum p_k(e_k) < 4^{-m}$, то

$$f(s) \leqslant f(s_m) + 4^{-m}.$$

Если теперь воспользоваться (1) и (2), то получим, что

$$f(s) < f(s_m) + 2^{-(m+1)} f(s) < f(s_m) + 2^{-m} f(s_m) = f(y).$$

Таким образом, никакой линейный функционал $f \in X'$ не достигает в точке $s \in \partial V$ своей верхней грани на множестве V. Противоречие. Следовательно, V имеет непустую внутренность. Теперь, наконец, воспользуемся ограниченностью окрестности нуля V и по теореме Колмогорова получим, что V определяет исходную топологию пространства X. Теорема доказана.

В заключение приведем пример полного бочечного локально выпуклого пространства, на которое не распространяется теорема 1.

Джеймс [6] построил пример неполного нормированного пространства E_0, в котором каждый линейный непрерывный функционал достигает нормы на единичном шаре (т. е. норма пространства E_0 обладает свойством (J)). Норму пространства E_0 обозначим $p_0(\cdot)$. Введем в E_0 сильнейшую локально выпуклую топологию и полученное локально выпуклое пространство обозначим E; известно [7, с. 39, 28, 113; 8, с. 116, 586], что E полно и бочечно. Получаем: в полном бочечном локально выпуклом пространстве E существует непрерывная норма со свойством (J), однако

E — не нормируемое пространство. Покажем, наконец, что сопряженное пространство E' является контрпримером к распространению теоремы 2. Возьмем в E' множество V — поляру множества $U = \{x \in E\colon p_0(x) \leqslant 1\}$. Получим: в полном бочечном локально выпуклом пространстве $X = (E', \sigma(E', E))$ существует ограниченное, замкнутое, абсолютно выпуклое множество V со свойством (J^*), которое, однако, не определяет исходную топологию в X.

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступило 22.05.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зарнадзе Д. Н. Рефлексивность и наилучшие приближения в пространствах Фреше.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, т. 44, № 4, с. 821—830.
[2] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.— М.: ИЛ, 1959.
[3] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств: Избранные главы.— Киев: Вища школа, 1980.
[4] Фонф В. П. Необходимое и достаточное условие рефлексивности B-пространства в терминах крайних точек его единичного шара.— Укр. мат. журн., 1978, т. 30, № 5, с. 692—695.
[5] Кадец М. И., Фонф В. П. Две теоремы о массивности границы в рефлексивном банаховом пространстве.— Функцион. анализ и его прил., 1983, т. 17, вып. 3, с. 77—78.
[6] James R. C. A counterexample for a sup theorem in normed spaces.— Israel J. Math., 1971, v. 9, № 4, p. 511—512.
[7] Робертсон А., Роберсон В. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1967.
[8] Эдвардс Р. Функциональный анализ: Теория и приложения.— М.: Мир, 1969.