МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 35, № 2 (1984)

ОБ УСЛОВИЯХ ВЫПУКЛОСТИ МНОЖЕСТВА ПРЕДЕЛОВ РИМАНОВЫХ СУММ ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

В. М. Кадец, М. И. Кадец

Пусть задана ограниченная функция f из отрезка [0; 1] в банахово пространство X, и пусть задано разбиение отрезка точками a_k и b_k:

$$0 = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \ldots < b_N = 1.$$

В каждом отрезке (a_j, b_j) выберем точку x_j. Римановой суммой $\sigma_f(\Gamma, \{x_j\})$, соответствующей данной функции f, данному разбиению Γ и данному набору $\{x_j\}$, называется вектор из X, равный $\sum_1^N f(x_j)\Delta_j$, где $\Delta_j = b_j - a_j$. Будем говорить, что разбиение Γ мельче, чем ε, если при любом j $\Delta_j < \varepsilon$. Точка $y \in X$ называется предельной точкой римановых сумм функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение Γ более мелкое, чем ε, и такой выбор точек $\{x_j\}$, что $\| \sigma_f(\Gamma, \{x_j\}) - y \| \leqslant \varepsilon$. Множество всех предельных точек римановых сумм функции f обозначим символом $\mathcal{J}(f)$. Если X — вещественная ось, то $\mathcal{J}(f)$ — это отрезок, соединяющий верхний и нижний интегралы Римана функции f. Как доказано в работе [1], если X — конечномерное пространство, или X — гильбертово пространство, то $J(f)$ — выпуклое множество.

Цель настоящей статьи — это, во-первых, распространить результат работы [1] на B-выпуклые банаховы пространства и, во-вторых, привести пример ограниченной функции g из отрезка [0, 1] в пространство l_1 такой, что $\mathcal{J}(g)$ — не выпуклое множество.

Будем говорить, что банахово пространство Y имеет тип p с константой C, если для любого набора векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ найдется набор чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n = \pm 1$ такой, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k y_k \right\|^p \leqslant C \sum_{k=1}^{n} \| y_k \|^p.$$

Банахово пространство называется B-выпуклым, если оно имеет тип $p > 1$. B-выпуклыми являются, например, все пространства L_p при $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть пространство Банаха Y имеет тип $p > 1$ с константой C. Пусть функция f: $[0; 1] \to Y$ такова, что для любого x из области определения $\| f(x) \| \leqslant k < \infty$. Тогда $\mathcal{J}(f)$ — выпуклое множество.*

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 принадлежат $\mathcal{J}(f)$. Докажем, что $(y_1 + y_2)/2 \in \mathcal{J}(f)$. Зададимся некоторым $N > 1$. Выберем такие разбиения Γ_1 и Γ_2, более мелкие, чем 2^{-2N}, и такие наборы точек $\{x_k^1\}$ и $\{x_k^2\}$, что $\| \sigma_f(\Gamma_1, \{x_k^1\}) - y_1 \| \leqslant 2^{-N}$ и $\| \sigma_f(\Gamma_2, \{x_k^2\}) - y_2 \| \leqslant 2^{-N}$. Обозначим через y_1^j $(1 \leqslant j \leqslant 2^N)$ кусок суммы $\sigma_f(\Gamma_1, \{x_k^1\})$, соответствующий отрезкам, правые концы которых меньше, чем $j/2^N$, а левые — больше, чем $(j-1)/2^N$. Тогда

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^N} y_1^j - \sigma(\Gamma_1, \{x_k^1\}) \right\| \leqslant 2^N \cdot k \cdot 2^{-2N} = \frac{k}{2^N}.$$

Аналогично введем векторы y_2^j. Для них выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^N} y_2^j - \sigma(\Gamma_2, \{x_k^2\}) \right\| \leqslant \frac{k}{2^N}.$$

Пусть $\{\xi_j\}_1^{2^N}$ — такой набор знаков, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^N} \frac{y_1^j - y_2^j}{2} \xi_j \right\|^p \leqslant C \sum_{j=1}^{2^N} \left\| \frac{y_1^j - y_2^j}{2} \right\|^p \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{j=1}^{2^N} \left(\frac{k}{2^{N+1}} \right)^p = \frac{C \cdot k^p}{2^p \cdot 2^{(p-1)N}}.$$

Построим такое разбиение Γ_3, более мелкое, чем 2^{-N}, и так выберем точки $\{x_k^3\}$, что если $\xi_j = +1$, то на отрезке $((j-1)/2^N; j/2^N)$ разбиение Γ_3 совпадает с Γ_1 и x_k^3 совпадают с x_m^1, а если $\xi_j = -1$, то на этом отрезке Γ_3

и $\{x_k^3\}$ совпадают с Γ_2 и $\{x_k^2\}$ соответственно. Тогда получим, что

$$\left\| \sigma_f(\Gamma_3, \{x_k^3\}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2^n} (y_1^j + y_2^j) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{2^N} + \left\| \sum_1^{2^N} \xi_j \frac{y_1^j - y_2^j}{2} \right\| \leqslant \frac{k}{2^N} + \left(\frac{c \cdot k^p}{2^p \cdot 2^{(p-1)N}} \right)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\left\| \sigma_f(\Gamma_3, \{x_k^3\}) - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2^N} + 2\frac{k}{2^N} + \left(\frac{c \cdot k^p}{2^p \cdot 2^{(p-1)N}} \right)^{1/p}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $N \to \infty$. Следовательно, $(y_1 + y_2)/2 \in \mathcal{J}(f)$. Из этого и из замкнутости $\mathcal{J}(f)$ следует, что $\mathcal{J}(f)$ — выпуклое множество. Теорема доказана.

Теперь приступим к конструкции функции с невыпуклой областью предельных точек римановых сумм. Зафиксируем $\varepsilon = 10^{-6}$; введем в рассмотрение определенную на всей оси функцию $\Psi(t)$ — расстояние от t до ближайшей целой точки. На отрезке $[0, 1]$ выделим два счетных семейства точек: $T^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^1$ и $T^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^2$; $T_n^j = \{t_{n,k}^j\}$ $(j = 1, 2;\ 1 \leqslant k \leqslant 2^n)$, где T_n^j — это множество лежащих на отрезке $[0, 1]$ корней уравнения

$$\frac{1}{2^n}\Psi(2^n \cdot t) = \frac{\sqrt{j+1}}{4^n} \cdot \varepsilon^2.$$

Заметим, что все множества T_n^j попарно не пересекаются. Обозначим через $e(1)$, $e(2)$ ..., орты канонического базиса пространства l_1 и определим искомую функцию $g(t)$ из $[0, 1]$ в l_1 следующим образом:

$$g(t) = \begin{cases} e(1) \quad \text{при} \quad t \notin T^1 \cup T^2, \\ e(2) + \left[e(2^{n+1} + 2k) - \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} e(2^{n+1} + 2i) \right] \\ \hfill \text{при } t = t_{n,k}^1, \\ e(3) + \left[e(2^{n+1} + 2k - 1) - \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} e(2^{n+1} + 2i - 1) \right] \\ \hfill \text{при } t = t_{n,k}^2. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. $J(g)$ — *не выпуклое множество.*

Доказательство. Если в качестве разбиения Г взять разбиение отрезка [0; 1] на 2^n равных отрезков, а в качестве точек x_k взять $t^1_{n,k}$, то

$$\sigma_g(\Gamma, \{x_j\}) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}\Big[e(2) + e(2^{n+1}+2j) - \\ - \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} e(2^{n+1}+2i)\Big] = e(2).$$

Следовательно, $e(2) \in \mathcal{J}(g)$. Аналогично $e(3) \in \mathcal{J}(g)$. Но, как мы сейчас покажем, $[e(2)+e(3)]/2 \notin \mathcal{J}(g)$. В самом деле, пусть для некоторого разбиения Г и некоторого выбора $\{x_j\}$

$$\left\|\sigma_g(\Gamma, \{x_j\}) - \frac{e(2)+e(3)}{2}\right\| \leqslant \varepsilon^2.$$

Представим $\sigma_g(\Gamma, \{x_k\}) = \Sigma g(x_k)\Delta_k$ в виде

$$\sum\nolimits_1 g(x_k)\Delta_k + \sum\nolimits_2 g(x_k)\Delta_k + \sum\nolimits_3 g(x_k)\Delta_k,$$

где в первую сумму собраны те элементы, у которых $x_k \in T^1$, во вторую — те, где $x_k \in T^2$, а в сумму Σ_3 — те элементы, где $x_k \notin T^1 \cup T^2$. Получаем, что

$$\varepsilon^2 \geqslant \left\|\sigma_g(\Gamma, \{x_k\}) - \frac{e(2)+e(3)}{2}\right\| = \left\|\sum\nolimits_3 g(x_k)\Delta_k\right\| + \\ + \left\|\frac{e(2)}{2} - \sum\nolimits_1 g(x_k)\Delta_k\right\| + \left\|\frac{e(3)}{2} - \sum\nolimits_2 g(x_k)\Delta_k\right\|.$$

Следовательно, $\Sigma_3\Delta_k \leqslant \varepsilon^2$;

$$\left\|\frac{e(2)}{2} - \sum\nolimits_1 g(x_k)\Delta_k\right\| \leqslant \varepsilon^2; \quad \left\|\frac{e(3)}{2} - \sum\nolimits_2 g(x_k)\Delta_k\right\| \leqslant \varepsilon^2.$$

Исследуем теперь отдельно сумму $\sum_1$. Представим $\sum_1$ в виде $\sum_1^1 g(x_k)\Delta_k + \sum_1^2 g(x_k)\Delta_k + \ldots + \sum_1^n g(x_k)\Delta_k$, где в $\sum_1^m$ входят такие слагаемые, что $x_k \in T^1_m$. Множество тех m, что $\sum_1^m \Delta_k \neq 0$, обозначим буквой A. Тогда

$$\left\|\sum\nolimits_1 g(x_k)\Delta_k - \frac{e(2)}{2}\right\| = \\ = \left\|\sum\nolimits_1 \Delta_k e(2) - \frac{e(2)}{2} + \sum_{n\in A}\sum\nolimits_1^n [g(x_k) - e(2)]\Delta_k\right\| = \\ = \left|\frac{1}{2} - \sum\nolimits_1 \Delta_k\right| + \sum_{n\in A}\left\|\sum\nolimits_1^n [g(x_k) - e(2)]\Delta_k\right\|.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{2}-\sum\nolimits_1 \Delta_k\right|+\sum\nolimits_{n\in A}\left\|\sum\nolimits_1^n [g(x_k)-e(2)]\,\Delta_k\right\|\leqslant\varepsilon^2. \tag{1}$$

Обозначим через B множество тех $n\in A$, что

$$\left\|\sum\nolimits_1^n [g(x_k)-e(2)]\,\Delta_k\right\|>\varepsilon\cdot\sum\nolimits_1^n \Delta_k.$$

Из неравенства (1) следует, что $\sum_{n\in B}\sum_1^n \Delta_k<\varepsilon$. Обозначим через C множество $A\setminus B$. Будут выполняться следующие неравенства:

$$\sum\nolimits_{n\in C}\sum\nolimits_1^n \Delta_k>\frac{1}{2}-\varepsilon-\varepsilon^2, \tag{2}$$

$$\left\|\sum\nolimits_1^n [g(x_k)-e(2)]\,\Delta_k\right\|\leqslant\varepsilon\sum\nolimits_1^n \Delta_k \quad (\text{для всех } n\in C). \tag{3}$$

Определим $R_1(n)$ как 2^n минус число слагаемых в сумме Σ_1^n. Функцию $R_1(n)$ будем определять только для $n\in C$. Неравенство (3) можно переписать в следующей форме: для всех $n\in C$

$$\sum\nolimits_1^n\left|\Delta_k-\frac{1}{2^n}\sum\nolimits_1^n\Delta_j\right|+R_1(n)\cdot\frac{1}{2^n}\sum\nolimits_1^n\Delta_j\leqslant\varepsilon\sum\nolimits_1^n\Delta_j. \tag{4}$$

Из (4) следует, что для всех $n\in C$ в сумме $\sum_1^n g(x_k)\,\Delta_k$ «задействовано» в качестве x_k не меньше чем $(1-\varepsilon)\cdot 2^n$ элементов из T_n^1.

Теперь вспомним, как устроено множество T_n^1. Это множество состоит из 2^n точек отрезка $[0, 1]$, причем справа и слева от каждой точки вида $k/2^{n-1}$ на расстоянии $4^{-n}\varepsilon^2\sqrt{2}$ находится точка множества T_n^1, т. е. каждая точка вида $k/2^{n-1}$ зажата между двумя точками множества T_n^1.

Пусть $n\in C$, $m>n$. Отрезок (a_k, b_k) из $\sum_1^m$ будем называть зажатым между точками из $\sum_1^n$, если найдутся две точки x_r и x_j из $\sum_1^n$ такие, что $x_r\leqslant a_k<b_k\leqslant x_j$; $\|x_r-x_j\|=2\cdot 4^{-n}\cdot\varepsilon^2\cdot\sqrt{2}$. Суммарная длина отрезков из $\sum_{m>n}\cdot\sum_1^m$, зажатых между точками x_k из $\sum_1^n$, не превышает $2^n\cdot$

$\cdot 4^{-n}\cdot\varepsilon^2\cdot\sqrt{2}=2^{-n}\varepsilon^2\sqrt{2}$. Значит, суммарная длина всех «зажатых» отрезков меньше, чем $\sum_{n\in C} 2^{-n}\varepsilon^2\sqrt{2}<2\varepsilon^2$. Объединим для всех $n\in C$ все не зажатые отрезки из $\sum_1^n$ в сумму, которую мы обозначим символом $\sum_{1,\,n}$. Так как суммарная длина отрезков, принадлежащих $\sum_{n\in C}\sum_1^n$, но не принадлежащих $\sum_{n\in C}\sum_{1,\,n}$, не превосходит $2\varepsilon^2$, то из (1) получим, что

$$\sum_{n\in C}\left\|\sum_{1,\,n}[g(x_k)-e(2)]\,\Delta_k\right\|\leqslant 10\varepsilon^2, \tag{5}$$

а из (2) получим, что

$$\sum_{n\in C}\sum_{1,\,n}\Delta_k>\frac{1}{2}-\varepsilon-\varepsilon^2-2\varepsilon^2. \tag{6}$$

Обозначим через C_1 множество тех $n\in C$, что

$$\left\|\sum_{1,\,n}[g(x_k)-e(2)]\,\Delta_k\right\|\leqslant\varepsilon\sum_{1,\,n}\Delta_k. \tag{7}$$

Так же, как из (1), мы получили (2), из (5) и (6) мы получаем следующее неравенство:

$$\sum_{n\in C_1}\sum_{1,\,n}\Delta_j>\frac{1}{2}-15\cdot\varepsilon-3\cdot\varepsilon^2.$$

Определим $R_2(n)$ как 2^n минус число слагаемых в сумме $\Sigma_{1,\,n}$. Расписав неравенство (7) так же, как мы раньше расписали неравенство (3), получаем, что для всех $n\in C_1$

$$R_2(n)\leqslant\varepsilon\cdot 2^n. \tag{8}$$

Через N обозначим $\max\{n\colon n\in C_1\}$. Докажем, что сумма $\sum_1 g(x_k)\,\Delta_k$ практически равна сумме $\sum_{1,\,N} g(x_k)\,\Delta_k$.

Пусть $n<N$, $n\in C_1$. Между точками из $\sum_{1,\,n}$ зажато не меньше чем $2^n(1-2\varepsilon)$ точек из T'_N. Так как все «зажатые» отрезки были удалены из $\sum_{1,\,N}$, то $R_2(N)\geqslant$ $\geqslant 2^n(1-2\varepsilon)$. Тогда из (8) получаем, что

$$2^N\frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}\geqslant 2^n. \tag{9}$$

Разобьем $\sum_{n\in C_1\setminus\{N\}}\sum_{1,\,n}\Delta_j$ на две суммы: $\sum^1$ и $\sum^2$. В $\sum^1$ объединим «маленькие» отрезки $\left(\text{такие, что }\Delta_j<\frac{1}{2^{N-2}}\right)$, а в $\sum^2$ — оставшиеся (т. е. «большие»). Из (9) получим, что

$$\sum{}^{1} \Delta_k < \sum\nolimits_{n \in C_1 \setminus \{N\}} \sum\nolimits_{1,\,n} \frac{1}{2^{N-2}} < 2^N \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} \frac{2}{2^{N-2}} < 10\varepsilon. \tag{10}$$

Каждый отрезок длины Δ_j из $\sum^2$ накрывает не меньше чем $\Delta_j \cdot 2^{N-1}$ точек из T_N^1. Значит, $R_2(n) \geqslant \frac{1}{2} 2^N \sum^2 \Delta_j$. Тогда из (8) получаем, что $\sum^2 \Delta_j < 2\varepsilon$. Из этого и из (10) получается, что $\sum^1 \Delta_j + \sum^2 \Delta_j < 12\varepsilon$. Следовательно, $\sum_{1,\,N} \cdot$ $\cdot \Delta_j > \frac{1}{2} - 30\varepsilon$. Т. е. $\sum_1$ практически равна сумме $\sum_{1,\,N}$.

Аналогично можно ввести суммы $\Sigma_{2,\,n}$ и точно так же получить, что Σ_2 почти равна сумме $\Sigma_{2,\,M}$. Пусть $N > M$. Аналогично вышеприведенным рассуждениям получаем, что

$$2^M \leqslant \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} 2^N \text{ и } \sum\nolimits_{2,\,M} \Delta_k < 12\varepsilon.$$

Противоречие. Следовательно, $[e(2) + e(3)]/2 \notin \mathcal{J}(g)$. Теорема доказана.

Ростовский инженерно-
строительный институт

Поступило
8.II.1983

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Halperin I., Miller N., An unequality of Steinitz and the limits of Riemann sums, Trans. Roy. Soc. Canada, 48 (1954), 27—29.