*Функциональный анализ и его приложения*,
1983, т. 17, вып. 3, 77—78.

УДК 517.98

# ДВЕ ТЕОРЕМЫ О МАССИВНОСТИ ГРАНИЦЫ В РЕФЛЕКСИВНОМ БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. И. Кадец, В. П. Фонф

Пусть $X$ — рефлексивное банахово пространство. Будем говорить, что подмножество $B$ единичной сферы $S(X)$ пространства $X$ является границей (для сопряженного пространства $X^*$), если

$$\forall f \in X^* \ \exists x \in B: \ f(x) = \|f\|.$$

Одной из границ является, очевидно, множество крайних точек ext $U(X)$ единичного шара $U(X)$ пространства $X$. Однако, вообще говоря, граница не обязана содержать все крайние точки (хотя и содержит все выставленные точки exp $U(X)$). Теорема Линденштраусса и Фелпса [1] о несчетности множества крайних точек единичного шара рефлексивного банахова пространства способствовала появлению работ, в которых исследовалась массивность (в том или ином смысле) этого множества ([2], [3]). Можно показать, что этими свойствами массивности обладает и граница.

Цель настоящей заметки — рассмотреть два новых естественных свойства массивности и доказать, что этими свойствами обладает любая граница в рефлексивном банаховом пространстве.

Предложение 1. *Пусть $X$ — банахово пространство и $B \subset S(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *Для каждого банахова пространства $Y$ и каждого линейного ограниченного оператора $T$ из $Y$ в $X$ такого, что $T(Y) \supset B$, имеет место $T(Y) = X$.*

(II) *Для всякого представления множества $B$ в виде объединения возрастающей последовательности множеств $B = \bigcup_1^\infty B_i$, $(B_i \uparrow)$ существует номер $j$ такой, что*

$$\inf_{f \in S(X^*)} \sup_{x \in B_j} |f(x)| > 0,$$

*(т. е. $B_i$ — нормирующее множество для пространства $X^*$).*

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II). Доказательство проведем от противного. Допустим существует представление $B = \bigcup B_i$, $B_i \uparrow$ и каждое $B_i$ — не нормирующее множество. Положим $A_1 = B_1$, $A_i = B_i \setminus B_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots)$, $V = \mathrm{cl\,conv}\,\{i^{-1}A_i\}_{i=1}^\infty$. Пусть $L$ — линейное многообразие, порожденное $V$, т. е. $L = \bigcup_{n=1}^\infty n \cdot V$. Покажем, что $L \neq X$. Ввиду абсолютной выпуклости и замкнутости множества $V$, достаточно показать, что последнее не содержит никакого шара с центром в нуле. Пусть $\varepsilon > 0$ и номер $j$ таков, что $j^{-1} < \varepsilon$. Так как $B_j$ — не нормирующее множество, то существует функционал $f \in S(X^*)$ такой, что $\sup_{x \in B_j} |f(x)| < \varepsilon$. Воспользовавшись определением множества $V$, получаем $\sup_{x \in V} |f(x)| < \varepsilon$. А это значит, что множество $V$ не содержит шара $\varepsilon \cdot U(X)$.

Обозначим через $Y$ линейное пространство $L$ с единичным шаром $V$. Пользуясь замкнутостью $V$, можно проверить, что $Y$ — банахово пространство. Пусть $T$ — естественное вложение $Y$ (т. е. $L$) в $X$. Легко видеть, что $T$ — линейная ограниченная инъекция пространства $Y$ в $X$, причем $T(Y) \supset B$, но $T(Y) = L \neq X$. Полученное противоречие с (1) и доказывает импликацию (I) $\Rightarrow$ (II).

(II) $\Rightarrow$ (I). Пусть $T$ — линейный ограниченный оператор из банахова пространства $Y$ в $X$, причем $T(Y) \supset B$. Положим $B_i = T(i \cdot U(Y)) \cap B$, $i = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $\{B_i\}$ — возрастающая последовательность множеств, причем $B = \bigcup B_i$. Но тогда по условию предложения существует номер $j$ такой, что

$$\inf_{f \in S(X^*)} \sup_{x \in B_j} |f(x)| = \delta > 0,$$

откуда легко получить, что $\mathrm{cl}\, T(U(Y)) \supset \delta / j\, U(X)$. Но последнее включение, согласно лемме 2 ([4], стр. 57), и означает сюръективность оператора $T$. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть $X$ — рефлексивное банахово пространство и $B$ — какая-нибудь граница. Тогда для всякого банахова пространства $Y$ и каждого линейного огра-*

*ниченного оператора $T$ из пространства $Y$ в пространство $X$ такого, что $T(Y) \supset B$, имеет место: $T(Y) = X$.*

Доказательство. Согласно предложению 1, достаточно проверить, что всякая граница в рефлексивном банаховом пространстве обладает свойством (II). Доказательство же этого факта аналогично доказательству теоремы 1 из [3]. Теорема доказана.

Замечание. Неизвестно, можно ли в теореме 1 заменить границу на множество выставленных точек $\exp U(X)$.

Следующее предложение доказывается непосредственной проверкой.

Предложение 2. *Пусть $\{x_i, f_i\}_1^\infty$ — биортогональная система в банаховом пространстве $X$. Положим*

$$L = \left\{x = \sum_1^\infty a_i x_i : \sum_1^\infty a_i x_i \text{ — сходится по норме}\right\}$$

*и введем на линейном многообразии $L$ новую норму*

$$|||x||| = \sup_n \left\| \sum_1^n a_i x_i \right\|, \quad x = \sum a_i x_i \in L.$$

*Тогда $(L, |||\cdot|||)$ есть полное линейное нормированное пространство с базисом $\{x_i\}$, причем*

$$\|x\| \leqslant |||x|||, \quad x \in L. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть $X$ — рефлексивное банахово пространство, $B$ — произвольная граница и минимальная система $\{x_i\}$ такова, что всякий элемент из $B$ разлагается в сходящийся по норме ряд по системе $\{x_i\}$. Тогда $\{x_i\}$ — базис всего пространства $X$.*

Доказательство. Определим линейное многообразие $L$ и норму $|||\cdot|||$ на $L$, как в предложении 2. Пусть $Y = (L, |||\cdot|||)$ и $T$ — естественное вложение пространства $Y$ в пространство $X$. Из (1) следует, что $T$ — ограниченный линейный оператор и, кроме того, по условию теоремы $T(Y) \supset B$. Из теоремы 1 получаем, что $T(Y) = X$, т. е. $\{x_i\}$ — базис пространства $X$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $B$ — произвольная граница в рефлексивном банаховом пространстве $X$. Можно показать, что в пространстве $X$ не существует минимальной системы такой, что всякий элемент границы разлагался бы в абсолютно сходящийся ряд по этой системе.

## ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Lindenstraus J., Phelps R.*— Isr. J. Math., 1968, v. 6, p. 39—48. 2. *Кадец М. И., Фонф В. П.*— Матем. заметки, 1976, т. 20, вып. 3, с. 315—319. 3. *Фонф В. П.*— Укр. матем. ж., 1978, т. 30, № 5, с. 692—695. 4. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

Поступило в редакцию 18 июня 1982 г.