МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 20, № 3 (1976), 315—319

УДК 513.8

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА КРАЙНИХ ТОЧЕК ЕДИНИЧНОГО ШАРА ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

М. И. Кадец, В. П. Фонф

В работе [1] было доказано, что единичный шар рефлексивного банахсвого пространства имеет несчетное множество крайних точек. В настоящей заметке показано, что это множество массивно и в некотором топологическом смысле. Библ. 3 назв.

В работе [1] доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А. *Если E — бесконечномерное рефлексивное пространство Банаха, то множество крайних точек его единичного шара несчетно.*

ТЕОРЕМА В. *Пусть E — банахово пространство и единичный шар пространства E^* имеет счетное множество крайних точек. Тогда*

1) *E^* сепарабельно,*

2) *E не содержит бесконечномерных рефлексивных подпространств.*

В этих теоремах массивность множества крайних точек характеризуется его мощностью.

Цель настоящей заметки — получить обобщение теорем А и В, при котором массивность множества крайних точек характеризовалась бы в топологических терминах.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть E — пространство Банаха и K — w^*-замкнутое, выпуклое и ограниченное подмножество E^*. Если множество крайних точек K «сильно» (т. е. в нормированной топологии E^*) сепарабельно, то K есть замыкание в нормированной топологии выпуклой оболочки своих крайних точек.*

Доказательство. Пусть $\{f_j\}_1^\infty$ — сильно плотное подмножество $\operatorname{ext} K$ и $\varepsilon_n \downarrow 0$. Для каждого натурального n обозначим $\{V_j^n\}_{j=1}^{\infty}$ последовательность замкнутых шаров радиуса ε_n с центрами в точках f_j. Ясно, что

$$\operatorname{ext} K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j^n = H^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как каждый шар есть w^*-замкнутое множество, то H^n — множество типа F_σ. Положим

$$A_m^n = V_m^n \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} V_i^n \qquad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Для каждого $n = 1, 2, \ldots$, очевидно, имеем

$$A_i^n \cap A_j^n = \phi \qquad (i \neq j).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что все A_m^n непусты. Нам надо доказать, что любой элемент $f_0 \in K$ можно с любой степенью точности аппроксимиров ть выпуклыми комбинациями крайних точек. Так как K — слабый* выпуклый компакт, то по теореме Шоке — Бишопа — де Лю (см. [2, замечание на стр. 33]) существует вероятностная мера μ, представляющая f_0 и для любого n сосредоточенная на $H^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^n$:

$$f_0(x) = \int_{H^n} f(x)\, \mu(df) \qquad (x \in E).$$

Возьмем произвольное $\delta > 0$ и определим n так, чтобы $\varepsilon_n < \delta/2$. С помощью меры μ образуем ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \mu\,(A_m^n) f_m$ и с его помощью приблизим f_0:

$$\Big\| f_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \mu\,(A_m^n)\, f_m \Big\| = \sup_{\|x\|=1} \Big| f_0(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m^n) f_m(x) \Big| =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \Big| \int_{H^n} f(x)\, \mu\,(df) - \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m^n} f_m(x)\, \mu\,(df) \Big| =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m^n} (f - f_m)(x)\, \mu\,(df) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|=1} \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{f \in A_m^n} |(f - f_m)(x)|\, \mu\,(A_m^n).$$

Так как

$$A_m^n \subset V_m^n \quad \text{и} \quad f_m \in V_m^n,$$

то каждый член последнего ряда допускает оценку

$$|(f - f_m)(x)| \, \mu(A_m^n) \leqslant \|f - f_m\| \, \mu(A_m^n) \leqslant \delta\mu(A_m^n).$$

Следовательно,

$$\left\| f_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m^n) f_m \right\| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \delta\mu(A_m^n) = \delta.$$

В силу произвольности δ последнее неравенство доказывает теорему.

Следствие. *Пусть E — банахово пространство и множество крайних точек единичного шара пространства E^* сильно сепарабельно, тогда E^* — сепарабельное пространство Банаха.*

ТЕОРЕМА 2. *Если E — бесконечномерное рефлексивное банахово пространство, то множество крайних точек его единичного шара не может быть покрыто счетным объединением компактных в нормированной топологии множеств.*

Доказательство. Мы будем следовать методу, развитому в [1]. Допустим, что, вопреки утверждению теоремы,

$$\operatorname{ext} U \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,$$

где каждое K_i — компактное в нормированной топологии E множество. Без ограничения общности можно считать, что

$$K_i \subset U = \{x \in E: \|x\| \leqslant 1\} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что из следствия к теореме 1 следует, что E — сепарабельное банахово пространство и, следовательно, U^* (единичный шар E^*) — метризуемый компакт в w^*-топологии E^* (которая в данном случае, очевидно, совпадает с w-топологией). Положим $F_n = \{f \in U^*: \exists x \in K_n, f(x) = \|f\|\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажем, что каждое F_n замкнуто в w^*-топологии E^*. Пусть

$$f^{(k)} \xrightarrow{w^*} f, \ f^{(k)} \in F_n$$

(n фиксировано, $k = 1, 2, \ldots$). Покажем, что $f \in F_n$. Для каждого k существует точка $x^{(k)} \in K_n$ такая, что

$$f^{(k)}(x^{(k)}) = \| f^{(k)} \|.$$

В силу компактности K_n существует подпоследовательность $\{x^{(k_l)}\}_{l=1}^{\infty}$ последовательности $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ и точка $x \in K_n$ такие, что $\| x^{(k_l)} - x \| \to 0$, при $l \to \infty$. Имеем

$$|f^{(k_l)}(x^{(k_l)}) - f(x)| \leqslant |f^{(k_l)}(x^{(k_l)}) - f^{(k_l)}(x)| + \\ + |f^{(k_l)}(x) - f(x)| \leqslant \| x^{(k_l)} - x \| + | f^{(k_l)}(x) - f(x) | \to 0$$

при $l \to \infty$.

Так как

$$\| f \| \leqslant \underline{\lim}_{k} \| f^{(k)} \| \leqslant \underline{\lim}_{l} \| f^{(k_l)} \| = \\ = \lim_{l} f^{(k_l)}(x^{(k_l)}) = \lim_{l} f^{(k_l)}(x^{(k_l)}) = f(x),$$

то $f(x) = \| f \|$. Следовательно, $f \in F_n$, чем и доказана w^*-замкнутость F_n. Из рефлексивности E и теоремы Крейна—Мильмана следует

$$U^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

На основании теоремы Бэра о категориях можно утверждать, что хотя бы одно из F_n (скажем, F_1) имеет непустую слабую* внутренность относительно U^*. Пусть f_0 — слабо* внутренняя точка F_1. Не теряя общности, можно считать, что $\| f_0 \| = 1 - \delta$, $\delta > 0$. Таким образом, существует конечное множество $\{x_i\}_{i=1}^{m} \subset E$ такое, что как только имеет место $f \in U^*$ и

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} | (f - f_0)\ (x_i) \ | < 1,$$

то $f \in F_1$. Пусть $\{y_j\}_{j=1}^{p}$ — конечная $\delta/2$-сеть для K_1; $N = \{f \in E^* : f(x_i) = f_0(x_i),\quad i = 1, \ldots, m;\quad f(y_j) = f_0(y_j),\ j = 1, \ldots, p\}$. Так как E — бесконечномерное банахово пространство, то плоское множество N конечной коразмерности содержит прямую линию, проходящую через f_0, которая пересекает S^* в некоторой точке g_0 ($S^* = \{f \in E^* : \| f \| = 1\}$). Таким образом, $g_0 \in F_1$ и $\| g_0 \| = 1$. Следовательно, существует точка $x_0 \in K_1$

такая, что

$$g_0(x_0) = \| g_0 \| = 1.$$

Выберем $y_{j_0} \in \{y_j\}_{j=1}^p$ так, чтобы $\|x_0 - y_{j_0}\| < \delta/2$. Имеем

$$|g_0(x_0) - g_0(y_{j_0})| \leqslant \|x_0 - y_{j_0}\| < \delta/2,$$

откуда

$$g_0(y_{j_0}) > 1 - \delta/2. \tag{1}$$

Но, с другой стороны, так как $g_0 \in N$,

$$g_0(y_{j_0}) = f_0(y_{j_0}) \leqslant \|f_0\| = 1 - \delta. \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) несовместимы. Полученное противоречие и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что E — банахово пространство и множество крайних точек единичного шара E^* может быть покрыто счетной суммой сильных компактов. Тогда E не содержит бесконечномерных рефлексивных подпространств.*

Доказательство. Допустим, что F — бесконечномерное рефлексивное подпространство E. Пусть T — оператор изометрического вложения F в E. Тогда T^* — эпиморфизм E^* на F^*, причем нетрудно доказать, что

$$T^*(U_{E^*}) = U_{F^*},$$

$$T^*(\operatorname{ext} U_{E^*}) \supset \operatorname{ext} U_{F^*}.$$

Пусть

$$\operatorname{ext} U_{E^*} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

где каждое K_n — компактное в нормированной топологии E^* подмножество S_{E^*}. Тогда

$$\operatorname{ext} U_{F^*} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T^*(K_n). \tag{3}$$

Так как каждое $T^*(K_n)$ — сильный компакт в F^*, то (3) противоречит теореме 2.

Следствие. *В условиях теоремы 3 E^{**} несепарабельно.*

Доказательство непосредственно следует из сопоставления теоремы 3 и следующего результата Розенталя и Джонсона (см. [3]). Если E^{**} сепарабельно, то E содержит бесконечномерное рефлексивное подпространство.

Специальное конструкторское
бюро «Турбогазмашина»

Поступило
25.IV.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Lindenstrauss J. and Phelps R., Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces, Israel J. Math., **6** (1968), 39—48.
[2] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, М., «Мир», 1968.
[3] Johnson W. B. and Rosenthal H. P., On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces, Studia Math., **43** (1972), 77—92.