УДК 517.52

Об абсолютной, совершенной и безусловной сходимости двойных рядов

© 1996. М. И. Кадец[1]

Ряд $\sum x_n$ в пространстве Банаха X называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum \|x_n\|$. Ряд называется совершенно сходящимся, если для любого набора коэффициентов $\alpha_n = \pm 1$ (обозначение: $\alpha \in D$) сходится ряд $\sum \alpha_n x_n$. Ряд называется безусловно сходящимся, если для любой перестановки натурального ряда $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ сходится ряд $\sum x_{\pi(n)}$. Понятия совершенной и безусловной сходимости эквивалентны. Каждый абсолютно сходящийся ряд сходится совершенно. Обратное верно в том и только в том случае, когда пространство конечномерно. Для дальнейшего нам потребуется банахово пространство $\mathrm{Perf}\,(X)$ всех совершенно сходящихся рядов в X. Норма в этом пространстве определяется как $\sup\{\|\sum \alpha_n x_n\| : \alpha \in D\}$. По поводу упомянутых понятий и фактов см., например, монографию [1].

Перейдем к рассмотрению двойных рядов. Прежде всего дадим определение сходимости двойного ряда, являющееся некоторым усилением определения сходимости по Принсгейму.

Определение 1. Ряд $\sum x_{ij}$ в банаховом пространстве X сходится к сумме $s \in X$, если (a) сходится каждый «ряд-столбец» $\sum_i x_{ij}$, $j \in \mathbb{N}$, (b) сходится каждый «ряд-строка» $\sum_j x_{ij}$, $i \in \mathbb{N}$, (c) сходится последовательность «прямоугольных» частных сумм:

$$s = \lim s_{mn} = \lim \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \colon \min(m,n) \to \infty \right\}.$$

Понятия абсолютной, совершенной и безусловной сходимости для двойных рядов, хорошо согласованные со структурой этих рядов, можно ввести следующим образом.

Определение 2. Ряд $\sum x_{ij}$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд $\sum \|x_{ij}\|$.

Определение 3. Ряд $\sum x_{ij}$ называется *совершенно сходящимся*, если для любых наборов коэффициентов $\alpha, \beta \in D$ сходится ряд $\sum x_{ij}\alpha_i\beta_j$.

Определение 4. Ряд $\sum x_{ij}$ называется *безусловно сходящимся*, если для любых перестановок натурального ряда π и σ сходится ряд $\sum x_{\pi(i),\sigma(j)}$.

Следующее утверждение характеризует совершенную сходимость в терминах линейных операторов.

Теорема 1. *Для двойного ряда $\sum x_{ij}$ в банаховом пространстве X следующие условия эквивалентны*: (A) *ряд сходится совершенно,* (B) *вектор-*

---

[1] Результаты настоящей заметки получены при поддержке Международного научного фонда, грант №V9H000.

нозначная матрица $A = (x_{ij})$ *порождает линейный компактный оператор* $A\colon c_0 \to \mathrm{Perf}\,(X)$, *действующий по правилу* $Ae_j = \{x_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$, $j \in \mathbb{N}$, *где* (e_j) *— канонический базис пространства* c_0. *Норма этого оператора равна*

$$M(A) = \sup\Big\{\Big\|\sum x_{ij}\alpha_i\beta_j\Big\| : \alpha, \beta \in D\Big\}. \tag{1}$$

Две другие теоремы описывают связь между совершенной, безусловной и абсолютной сходимостью двойных рядов.

Теорема 2. *Двойной ряд сходится совершенно в том и только том случае, если он сходится безусловно.*

Теорема 3. *Существуют двойные числовые ряды, сходящиеся совершенно, но не абсолютно.*

Эскиз доказательства. Требуемый пример мы построим из «блоков» — отнормированных соответствующим образом матриц Уолша. Напомним, что матрицей Уолша W_n, $n \in \mathbb{N}$, называется ортогональная матрица порядка $m = 2^n$, все элементы которой равны ± 1. Последовательность матриц Уолша можно определить по индукции:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} W_1 & W_1 \\ W_1 & -W_1 \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Сумма абсолютных величин элементов матрицы Уолша равна $N(W_n) = m^2$. Функционал (1) допускает оценку $M(W_n) \leqslant m^{3/2}$. Введем теперь матрицы $A_n = m^{-2}W_n$. Ясно, что $N(A_n) = 1$ и $M(A_n) \leqslant 1/\sqrt{m}$. Образуем бесконечную матрицу $A = (a_{ij})$, поставив на ее диагонали матрицы A_n и положив все остальные элементы равными нулю. Двойной ряд, порожденный этой матрицей, сходится совершенно $(M(A) \leqslant \sqrt{2} + 1)$, но не абсолютно $(N(A) = \infty)$.

Замечание 1. Теорема 1 и теорема 3 остаются верными, если в определении 1 отбросить условия (a) и (b). Однако теорема 2 при этом окажется неверной. Соответствующий пример — двойной ряд $\sum a_{ij}$, где

$$a_{1j} = (-1)^j, \ a_{2j} = -a_{1j}, \ a_{ij} = 0 \quad \text{при } i > 2, \ j \in \mathbb{N}.$$

Замечание 2. Несовпадение безусловной и абсолютной сходимости для числовых двойных рядов отчасти «компенсируется» следующим утверждением: если ряд $\sum a_{ij}$ безусловно сходится, то сходится ряд $\sum a_{ij}^2$.

Литература

1. *Kadets V. M., Kadets M. I.* Rearrangements of Series in Banach Spaces. Transl. Math. Monographs, Vol. 86, Am. Math. Soc., 1991.

Харьковская государственная академия
городского хозяйства

Поступило в редакцию
26 августа 1994 г.