Для доказательства теоремы В заметим, что из теоремы деления следует, что при $\lambda_{k-1} > \lambda_k > \lambda_{k+1}$ у (n,λ)-частицы при делении вероятность увеличения λ_k равна $p_k = q^{-k+1} - q^{-k}$. Теорема А же говорит о том, что $\lambda_{k-1}, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ концентрируются с большой вероятностью вокруг $p_{k-1} > p_k > p_{k+1}$ соответственно, поэтому вероятность «патологических» (n,λ)-частиц с $\lambda_{k-1} = \lambda_k$ или $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ мала. Таким образом, при делении λ_k ведет себя почти так же, как при прибавлении независимой бернуллиевской случайной величины ξ с $\mathrm{P}\{\xi = 1\} = p_k$, $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1 - p_k$, т.е. распределение (n,λ)-частиц по λ_k близко к (n, p_k)-биномиальному:

$$\mathrm{P}\{\lambda_k \leqslant x\} \approx \sum_{0\leqslant l\leqslant x} C_n^l p_k^l (1-p_k)^{n-l},$$

откуда с помощью центральной предельной теоремы получаем теорему В.

Автор рад возможности поблагодарить А. А. Кириллова за постановку задачи и внимание к работе, а также С. В. Керова и Г. И. Ольшанского за внимание, полезные обсуждения и поддержку.

Литература

1. *Kirillov A. A.* Variations on the triangular theme. In: Dynkin Seminar on Lie Groups, Adv. Math. Sci., Am. Math. Soc. (1995). **2.** *Вершик А. М., Керов С. В.* Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 4, 15–27 (1981). **3.** *Козлов М. В.* Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. Изд-во МГУ, М. (1990).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
18 ноября 1994 г.

УДК 519.46

О связи между сильной и скалярной почти периодичностью банаховых представлений группы вещественных чисел

© 1995. М. И. Кадец[1]

Начнем с определения понятий, фигурирующих в заглавии.

Определение 1. Ограниченная непрерывная функция $f(t)$, определенная на числовой оси $\mathbb{R}$ и принимающая значения в банаховом пространстве X, называется (*сильно*) *почти периодической* (в дальнейшем *п.п.*), если множество ее сдвигов $f(t+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, относительно компактно в равномерной метрике. При $X = \mathbb{C}$ получаем (бохнеровское) определение п.п. функции Бора.

Определение 2. Функция $f\colon \mathbb{R} \to X$ называется *скалярно п.п.*, если для любого линейного функционала $x^* \in X^*$ скалярная функция $\langle x^*, f(t)\rangle$ есть п.п. функция Бора. Иногда скалярно п.п. функцию называют слабо п.п., но при этом возможно смешение со слабо п.п. функциями в смысле Эберляйна.

[1]Эта работа выполнена при поддержке Американского математического общества.

Каждая п.п. функция со значениями в X является скалярно п.п. Обратное верно в том и только том случае, когда X обладает свойством Шура (совпадение слабой и сильной сходимости последовательностей).

Определение 3. Однопараметрическая сильно непрерывная группа линейных непрерывных операторов $T(t)$ $(t \in \mathbb{R},\ T(t_1+t_2)=T(t_1)T(t_2),\ T(0)=I)$, действующая в банаховом пространстве X, называется (*сильно*) *п.п.*, если для любого $x \in X$ функция $T(t)x$ со значениями в X является п.п. Группа $T(t)$ называется *скалярно п.п.*, если для любых $x \in X$ и $x^* \in X^*$ скалярная функция $\langle x^*, T(t)x\rangle$ есть п.п. функция Бора.

Вообще говоря, приведенные понятия определяются для произвольной топологической группы G_0 (почти периодические представления группы G_0, см. [1]), но в этой заметке мы ограничимся случаем $G_0 = \mathbb{R}$. Одна из причин такого ограничения — отсутствие теоремы о счетности спектра скалярно п.п. функции на группах, отличных от $\mathbb{R}$ (см. [4]).

Ю. И. Любичу [2] принадлежит следующее утверждение: *если X слабо секвенциально полно, то каждая скалярно п.п. группа, действующая в X, является п.п. Если же $X = c$ (банахово пространство всех сходящихся числовых последовательностей), то существует скалярно п.п. группа, не являющаяся п.п.* Возникает естественный для теории функций со значениями в пространствах Банаха вопрос: каков максимальный класс пространств Банаха, для которого выполняется позитивная часть утверждения Любича? Настоящая заметка дает частичный ответ на этот вопрос.

Теорема. *Пусть банахово пространство X обладает следующим свойством: слабое* секвенциальное замыкание каждого его сепарабельного подпространства Y во втором сопряженном Y^{**} сепарабельно. Тогда каждая скалярно п.п. группа, действующая в X, является п.п.*

Начало доказательства теоремы. Возьмем произвольный элемент $y_0 \in X$ и образуем скалярно п.п. функцию $f(t) = T(t)y_0$. Обозначим замкнутую линейную оболочку множества ее значений через Y. Так как множество значений скалярно п.п. функции сепарабельно [3], то Y сепарабельно. Слабое* секвенциальное замыкание подпространства Y в Y^{**} обозначим через $E \subset Y^{**}$. Если компактифицировать числовую ось $\mathbb{R}$ с помощью спектра функции $f(t)$, то благодаря счетности этого спектра [4] получим предкомпактную метрическую группу, пополнение G которой будет компактной метрической группой. (Случай чисто периодической функции $f(t)$, когда $\mathbb{R}$ при компактификации превращается в окружность, никаких дополнительных затруднений не создает.) Функция $f(t)$ после доопределения на G окажется слабо* непрерывной функцией со значениями в E. Теорема будет доказана, если мы установим сильную непрерывность доопределенной функции. Так как рассматриваемая функция порождена группой $T(t)$, то достаточно доказать ее сильную непрерывность хотя бы в одной точке $t_0 \in G$ (мы сохраняем для доопределенной функции обозначение $f(t)$).

Для завершения доказательства теоремы нам потребуется некоторое утверждение о специальных эквивалентных нормах в сепарабельных пространствах Банаха. Пусть E — сепарабельное пространство Банаха, а Γ — замкнутое линейное подпространство сопряженного пространства E^*. С помощью Γ определим на E полунорму $p(e) = \sup\{|\langle e^*, e\rangle| : e^* \in \Gamma,\ \|e^*\| \leqslant 1\}$. *Характеристика Диксмье* подпространства Γ определяется так: $r(\Gamma) = \inf\{p(e) : e \in E,$

$\|e\| = 1\}$. Подпространство Γ называется *нормирующим*, если $r(\Gamma) > 0$; оно называется 1-*нормирующим*, если $r(\Gamma) = 1$.

Определение 4. Пусть E — банахово пространство, а Γ — подпространство из E^*. Говорят, что E *обладает свойством* $H(\Gamma)$, если выполняются два условия: (K_1) если $\langle e^*, e_n\rangle \to \langle e^*, e\rangle$ для всех $e^* \in \Gamma$, то $\liminf \|e_n\| \geqslant \|e\|$; ($K_2$) если, кроме того $\|e_n\| \to \|e\|$, то $\|e_n - e\| \to 0$.

Предложение 1. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство и $\Gamma \subset E^*$ — нормирующее подпространство. Тогда на E существует эквивалентная норма со свойством $H(\Gamma)$, относительно которой Γ будет 1-нормирующим.*

Это некоторое усиление известной теоремы об эквивалентных нормах со свойством $H(\Gamma)$ (см., например, [5, с. 176–184]). Предложение 1 позволяет доказать следующее утверждение, необходимое для завершения доказательства теоремы.

Предложение 2. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $\Gamma \subset E^*$ — нормирующее подпространство и G — метрический компакт. Пусть $f\colon G \to E$ есть Γ-слабо непрерывная функция. Тогда найдется точка $t_0 \in G$, в которой функция $f(t)$ сильно непрерывна.*

Завершение доказательства теоремы. Мы имеем сепарабельное банахово пространство Y и его слабое* секвенциальное замыкание в Y^{**}, обозначенное через E, которое сепарабельно по условию теоремы. В качестве нормирующего подпространства Γ возьмем образ Y^* при его естественном вложении в E^*. В начале доказательства мы имели слабо* непрерывную функцию $f(t)$, определенную на метрическом компакте G и принимающую значения в сепарабельном подпространстве $E \subset Y^{**}$. Можно сказать иначе: мы имеем Γ-слабо непрерывную функцию на G, принимающую значения в сепарабельном пространстве E. Таким образом, мы оказываемся в условиях предложения 2, что дает существование хотя бы одной точки сильной непрерывности функции $f(t)$. Согласно сделанному ранее замечанию о природе функции $f(t)$, она оказывается сильно непрерывной на G, что и доказывает теорему.

Возможно также рассмотреть задачу о совпадении сильной и скалярной почти периодичности представлений групп для произвольных пространств Банаха. Вот один из таких результатов [6]: *В любом банаховом пространстве представление, являющееся одновременно скалярно и слабо (по Эберляйну) п.п., является почти периодическим.*

Литература

1. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп. ВШ, Харьков (1985). **2.** *Любич Ю. И.* УМН, **18**, вып. 1, 165–171 (1963). **3.** *Amerio L.* Boll. Un. Mat. Ital., **20**, 267–333 (1965). **4.** *Кадец М. И., Кюрстен К. Д.* Теория функций, функц. анал и прил., вып. 33, 45–49 (1980). **5.** *Bessaga C., Pelczynski A.* Selected topics in infinite-dimensional topology. PWN, Warszawa (1975). **6.** *Кадец М. И., Любич Ю. И.* Теория функций, функц. анал. и прил., вып. 53, 3–5 (1990).

Харьковская государственная
академия городского хозяйства

Поступило в редакцию
16 июня 1994 г.