Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 3, 58—60.

УДК 513.881

О СВЯЗИ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ СВОЙСТВАМИ ВЫПУКЛОСТИ ЕДИНИЧНОГО ШАРА ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

М. И. Кадец

Согласно фундаментальной теореме Розенталя [1] банахово пространство не содержит подпространств, изоморфных l_1, в том и только том случае, если из каждой ограниченной последовательности элементов этого пространства можно выделить слабую подпоследовательность Коши. Теорема Розенталя имеет многочисленные следствия линейно-топологического характера (см. обзор [2]). В предлагаемой заметке мы покажем, что отсутствие подпространств, изоморфных l_1, может сказываться и на геометрических свойствах пространства.

Напомним некоторые определения. Банахово пространство X называется *строго нормированным* (обозначение: $X \in R$), если его единичная сфера не содержит прямолинейных отрезков. Банахово пространство называется *симметрично локально равномерно выпуклым* (обозначение: $X \in MLUR$), если из условий $\| x_0 \| = 1$, $\| x_0 \pm y_n \| \to 1$ при $n \to \infty$ следует, что $\| y_n \| \to 0$. Банахово пространство называется *локально равномерно выпуклым* (обозначение: $X \in LUR$), если из условий $\| x_0 \| = 1$, $\| x_0 + y_n \| \to 1$ и $\| x_0 + {}^1/_2\, y_n \| \to 1$ при $n \to \infty$ следует, что $\| y_n \| \to 0$. Банахово пространство *обладает H-свойством* (обозначение: $X \in H$), если из условий $\| x_0 \| = 1$, $\| x_0 + y_n \| \to 1$ и $y_n \overset{\text{сл}}{\to} 0$ при $n \to \infty$ следует, что $\| y_n \| \to 0$. Свойство $MLUR$ (наименее известное из отмеченных выше) было введено Андерсоном [3]; здесь мы привели эквивалентное определение этого свойства, предложенное Смитом и Туретом [4].

Известны следующие импликации:

$$(X \in LUR) \Rightarrow (X \in MLUR) \Rightarrow (X \in R), \quad (X \in LUR) \Rightarrow (X \in H). \tag{1}$$

В [3] был поставлен вопрос: при каких условиях на X выполняется импликация

$$(X \in R) \text{ и } (X \in H) \to (X \in MLUR)? \tag{2}$$

Смит [5] построил пример (пространство, изоморфное l_1), для которого импликация (2) не выполняется. В [4] высказано предположение, что импликация (2) выполняется в случае, когда X^* удовлетворяет условию Радона — Никодима. Мы докажем сейчас более сильное предложение.

Теорема 1. *Пусть X не содержит подпространств, изоморфных l_1. Если $X \in R$ и $X \in H$, то $X \in MLUR$.*

Доказательство. Допустим противное: $X \notin MLUR$. Тогда найдутся нормированный элемент $x_0 \in X$ и последовательность $(y_n) \subset X$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \| x_0 \pm y_n \| = \| x_0 \| = 1, \quad \text{но} \quad \| y_n \| \geqslant \delta > 0. \tag{3}$$

Так как X не содержит подпространств, изоморфных l_1, можно считать, не ограничивая общности, что (y_n) — слабая последовательность Коши. Образуем последовательность элементов вида $x_0 + {}^1/_2\,(y_p - y_q)$, где p и q неограниченно возрастают. Эта последовательность слабо сходится к x_0. Рассмотрим неравенство треугольника

$$\left\| x_0 \pm \frac{1}{2}(y_p - y_q) \right\| \leqslant \frac{1}{2} [\| x_0 \pm y_p \| + \| x_0 \mp y_q \|] \tag{4}$$

и перейдем к пределу при неограниченном возрастании p и q. Правая часть согласно (3) даст $\| x_0 \|$, а для левой получим

$$\varliminf \left\| x_0 \pm \frac{1}{2}(y_p - y_q) \right\| \geqslant \| x_0 \|,$$

так как последовательность $y_p - y_q$ слабо сходится к нулю. Сопоставляя пределы левой и правой частей неравенства (4), получаем

$$\lim \left\| x_0 + \frac{1}{2}(y_p - y_q) \right\| = \| x_0 \|.$$

Так как по условию теоремы X обладает H-свойством, то $\| y_p - y_q \| \to 0$, и, значит, последовательность (y_n) сильно сходится к некоторому элементу y, $\| y \| \geqslant \delta > 0$. Из предельного соотношения (3) получаем $\| x_0 \pm y \| = \| x_0 \|$, что противоречит строгой нормированности пространства X. Мы пришли к противоречию с одним из условий теоремы.

Наличие у X^* свойства Радона — Никодима влечет отсутствие в X подпространств, изоморфных l_1; обратное неверно. Таким образом, доказанное утверждение сильнее, чем предположение в [4].

Далее мы покажем, что теорема 1 не может быть усилена в классе сепарабельных банаховых пространств. Прежде всего воспроизведем пример Смита [5].

Пример. Пусть $(e_n)_0^\infty$ — канонический базис пространства l_1. Введем сначала в l_1 эквивалентную норму

$$\|x\| = \max\left\{|a_0|, \sum_1^\infty |a_n|\right\} \qquad \left(x = \sum_0^\infty a_n e_n\right). \tag{5}$$

Пространство l_1, снабженное этой нормой, обозначим через E. Оно понадобится нам в дальнейшем. Искомая норма определится равенством

$$\|x\|_1 = \|x\| + \sqrt{\sum_0^\infty c_n \cdot |a_n|^2}, \tag{6}$$

где (c_n) — фиксированная числовая последовательность, $c_n > 0$, $c_n \to 0$. Пространство l_1 в любой эквивалентной норме обладает H-свойством, так как в нем совпадают сильная и слабая сходимости (свойство Шура). Второе слагаемое в (6) обеспечивает строгую нормированность пространства. В то же время, как легко проверить,

$$\lim_{n\to\infty} \|e_0 \pm e_n\|_1 = \|e_0\|_1, \qquad \|e_n\|_1 > 1, \tag{7}$$

откуда следует, что построенное пространство E_1 не есть $MLUR$.

Лемма. *Пусть X — банахово пространство, Y — его подпространство, изоморфное l_1. Пусть, далее, в фактор-пространстве X/Y существует эквивалентная норма с H-свойством; порожденную ею полунорму в X обозначим через $p(x)$. Тогда из условий*

$$x_n \overset{\text{сл}}{\to} x_0, \qquad p(x_n) \to p(x_0) \tag{8}$$

следует, что $\|x_n - x_0\| \to 0$.

Доказательство. Обозначим через $F : X \to X/Y$ каноническое фактор-отображение. Условия (8) порождают в фактор-пространстве соотношения

$$Fx_n \xrightarrow{\text{сл}} Fx_0, \qquad \|Fx_n\| \to \|Fx_0\|, \tag{9}$$

где $\|Fx\| \equiv p(x)$ — норма с H-свойством, существование которой предусмотрено условием леммы. Из (9) следует, что $\|Fx_n - Fx_0\| \to 0$. Возвращаясь в пространство X, имеем: последовательность (x_n) неограниченно приближается к множеству $x_0 + Y$. Иначе говоря,

$$x_n = x_0 + y_n + z_n, \qquad \text{где} \quad y_n \in Y, \quad \|z_n\| \to 0. \tag{10}$$

Из (8) и (10) следует, что последовательность (y_n) слабо сходится к нулю, и по свойству Шура $\|y_n\| \to 0$. Таким образом, $\|x_n - x_0\| \to 0$.

Теорема 2. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, содержащее подпространство Y, изоморфное l_1. Тогда в X можно ввести эквивалентную норму, относительно которой оно будет строго нормированным, будет обладать H-свойством, но не будет $MLUR$.*

Доказательство. Пусть $T : Y \to E$ — изоморфизм подпространства Y на пространство E, построенное в примере, причем $\|T\| < 1$. Введем в X эквивалентную норму

$$\|x\|_1 = \inf_{y\in Y} [\|x - y\| + \|Ty\|], \qquad 1 \leqslant \|x\|/\|x\|_1 \leqslant \|T^{-1}\|. \tag{11}$$

Геометрически это означает, что новый единичный шар является замкнутой выпуклой оболочкой старого шара пространства X и множества $T^{-1}(V)$, где V — единичный шар пространства E. Нам потребуется следующее свойство новой нормы: если $x \in Y$ то $\|x\|_1 = \|Tx\|$. Далее, в фактор-пространстве X/Y введем эквивалентную норму с H-свойством; это возможно в силу сепарабельности X (см. [6]). Соответствующую полунорму в X обозначим, как и в лемме, через $p(x)$. Выделим, наконец, в X минимальную систему $(x_n)_{-\infty}^\infty$ с тотальной сопряженной, являющуюся «продолжением» системы $(T^{-1}e_n)_0^\infty$ ($e_n \in E$ из примера; $x_n = T^{-1}e_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$). Возможность такого продолжения доказана в [7]. Пусть теперь $x \in X$ его разложение по системе (x_n) имеет вид $x \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, x_n$. Возьмем последовательность положительных коэффициентов $(c_n)_{-\infty}^{\infty}$, подчиненную условиям $\Sigma c_n \cdot \| f_n \|^2 < \infty$, $c_n \to 0$. Искомую эквивалентную норму определим так:

$$\| x \|_2 = \| x \|_1 + p(x) + \left[\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot | f_n(x) |^2 \right]^{1/2}. \tag{12}$$

Строгая нормированность X относительно построенной нормы обеспечивается последним слагаемым; наличие H-свойства — вторым слагаемым (с помощью леммы). Наконец, отсутствие свойства $MLUR$ устанавливается точно так же, как в примере (здесь используется отмеченное выше свойство нормы $\| \cdot \|_1 : \| x \|_1 = \| Tx \|$ для всех $x \in Y$).

Неясно, как распространить теорему 2 на несепарабельные пространства Банаха.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenthal H. P.*— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1974, v. 71, p. 2411—2413. 2. *Rosenthal H. P.*— Bull. Amer. Math. Soc., 1978, v. 84, № 5, p. 804—831. 3. *Anderson K. W.* Midpoint local uniform convexity: Dissertation: Univ. of Illinois, 1960. 4. *Smith M. A.*, *Turett B.*— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 257, № 1, p. 105—118. 5. *Smith M. A.*— Math. Ann., 1978, B. 233, S. 155—161.

Харьковский институт инженеров
коммунального строительства

Поступило в редакцию
29 сентября 1980 г.