Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 2, 1975, 73—74.

ЗАМЕЧАНИЕ О РАСТВОРЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

М. И. Кадец

Пусть G и H — подпространства банахова пространства X. В качестве меры их удаления друг от друга введено понятие раствора $\theta(G, H)$ (см. [1], [2]) и некоторые его модификации $\widetilde{\theta}(G, H)$ (см. [3]) и $\widehat{\theta}(G, H)$ (см. [4]). Последняя модификация в некоторых отношениях является наиболее удачной. Она определяется формулой

$$\widehat{\theta}(G, H) = \max\{\sup_g \rho(g, B_H);\ \sup_h \rho(h, B_G)\}, \tag{1}$$

где g и h пробегают единичные шары B_G и B_H соответствующих пространств. Раствор $\widehat{\theta}$ (как и $\widetilde{\theta}$) является метрикой на множестве всех подпространств. Если G и H конечномерны и имеют различную размерность, то $\widehat{\theta}(G, H) = \theta(G, H) = 1$. Все три определения раствора эквивалентны — они порождают одну и ту же топологию на множестве всех подпространств.

В некоторых случаях малость раствора влечет изоморфизм подпространств ([2], теорема 1.2; [4], теорема 4). Мы покажем, что в общем случае это не так. Более точно, будет построено банахово пространство F, подпространство $H \subset F$, изометричное l_2, и последовательность подпространства $G_n \subset F$, изометричных l_{p_n} ($p_n \nearrow 2$), такая, что $\theta(G_n; H) \to 0$ (хотя пространства l_p попарно не изоморфны).

Зафиксируем $p \in (1, 2)$ и определим нелинейные операторы A и B, действующие из l_2 в l_p и l_q соответственно ($p^{-1} + q^{-1} = 1$): если $x = \{x_i\} \in l_2$, то

$$Ax = \{|x_i|^{2/p} \cdot \operatorname{sign} x_i\}, \qquad Bx = \{|x_i|^{2/q} \cdot \operatorname{sign} x_i\}. \tag{2}$$

Эти операторы осуществляют гомеоморфизм между единичными сферами пространств l_2, l_p и l_q. Определим банахово пространство F_1, как прямое произведение пространств l_p и l_2, наделенное нормой

$$\|(g, h)\| = \sup_y |\langle g, By\rangle + \langle h, y\rangle| \qquad (g \in l_p;\ h \in l_2,\ y \in l_2;\ y \in l_2;\ \|y\| = 1). \tag{3}$$

(Символом $\langle u, v\rangle$ мы обозначаем значение линейного функционала v на элементе u.) Нетрудно видеть, что выражение (3) действительно является нормой, относительно которой F_1 — банахово пространство, и что подпространства G_1 и H_1, образованные элементами вида $(g, 0)$ и $(0, h)$, изометричны пространствам l_p и l_2.

Оценим раствор между подпространствами G_1 и H_1. Непосредственно из определений следует

$$\widehat{\theta}(G_1, H_1) \leqslant \sup_x \|(Ax, 0) - (0, x)\| = \sup_x \|(Ax, -x)\| =$$
$$= \sup_{x, y} |\langle Ax, By\rangle - \langle x, y\rangle| \qquad (x, y \in l_2, \|x\| = \|y\| = 1). \tag{4}$$

Таким образом, нам предстоит оценить сверху выражение

$$R = |\langle Ax, By\rangle - \langle x, y\rangle| = \left|\sum_i |x_i|^{2p} \cdot \operatorname{sign} x_i \cdot |y_i|^{2/q} \cdot \operatorname{sign} y_i - x_i y_i\right|. \tag{5}$$

Заметив, что достаточно рассматривать элементы x и y лишь с неотрицательными координатами, перепишем (5) в виде

$$R = \sum_i x_i y_i^{1-\varepsilon} |x_i^{\varepsilon} - y_i^{\varepsilon}| \qquad \left(x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0,\ \varepsilon = 1 - \frac{2}{q}\right). \tag{6}$$

С помощью формулы Лагранжа, а затем неравенства Коши получаем

$$R \leqslant \sum_i x_i y_i^{1-\varepsilon} \varepsilon \max\{x_i^{\varepsilon-1}, y_i^{\varepsilon-1}\} \cdot |x_i - y_i| = \varepsilon \cdot \sum_i \max\{x_i^{\varepsilon} y_i^{1-\varepsilon}, x_i\} \cdot |x_i - y_i| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_i \max\{x_i, y_i\} \cdot |x_i - y_i| \leqslant \varepsilon \sum_i (x_i + y_i) \cdot |x_i - y_i| \leqslant \varepsilon \|x + y\| \cdot \|x - y\| \leqslant 2\varepsilon. \tag{7}$$

Таким образом, раствор между подпространствами G_1 и H_1 не превосходит $2\varepsilon = 2(2 - p)p^{-1}$. Если взять $p > 4/3$, то получим пример двух неизоморфных подпространств, раствор между которыми меньше, чем единица.

Построим теперь пространство F. Зададимся последовательностью

$$1 < p_1 < p_2 < \ldots, \qquad \lim p_n = 2, \tag{8}$$

для каждого p_n построим, как это было сделано выше, пространство F_n и выделим в нем подпространства G_n и H_n. Установим изометрические соответствия $T_n : H_n \to l_2$ между подпространствами H_n и пространством l_2. Образуем произведение $E = \{F_1 \times F_2 \times \ldots\}_{l_1}$; выделим в нем подпространство E_0, образованное последовательностями $h = \{h_1, h_2, \ldots\}$ $(h_n \in H_n \subset F_n)$, подчиненными условию $\sum T_n h_n = 0$. Положим $F = E/E_0$. Непосредственно проверяется, что F содержит изометричные образы пространств F_n (обозначим их снова через F_n) и что все подпространства H_n «склеиваются» в F в одно подпространство H, изометричное l_2 (ср. [5], лемма о совмещении вложений). Ясно, что пространство F обладает требуемыми свойствами: оно содержит последовательность попарно не изоморфных подпространств G_n, сходящуюся в смысле раствора к подпространству H.

В дополнение к оценке (7) заметим, что в любом объемлющем пространстве раствор между подпространствами G и H, изометричными соответственно l_p и l_2 $(p < 2)$, ограничен снизу:

$$\hat{\theta}(G, H) \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt[p]{2} - \sqrt{2}). \tag{9}$$

Действительно, выделим в G координатные орты e_1 и e_2. Возьмем в единичном шаре подпространства H ближайшие к ним элементы x и y:

$$\|x - e_1\| \leqslant \hat{\theta}(G, H), \quad \|y - e_2\| \leqslant \hat{\theta}(G, H), \quad \|x\| \leqslant 1, \ \|y\| \leqslant 1. \tag{10}$$

Оценим $\|x + y\|$ и $\|x - y\|$:

$$\|x \pm y\| \geqslant \|e_1 \pm e_2\| - \|x - e_1\| - \|y - e_2\| \geqslant \sqrt[p]{2} - 2\hat{\theta}(G, H). \tag{11}$$

Последние неравенства в соединении с тождеством параллелограмма дают

$$2\left(\sqrt[p]{2} - 2\hat{\theta}(G, H)\right)^2 \leqslant \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leqslant 4,$$

откуда и получается (9).

Проведенные построения, по-видимому, оправдывают введение следующих понятий. Пусть X и Y — произвольные банаховы пространства. *Мерой их близости* $p_0(X, Y)$ $(p_1(X, Y))$ назовем число

$$p_i(X, Y) = \inf_E \inf_{U, V} \theta(UX, VY) \qquad (i = 0, 1),$$

где E пробегает всевозможные банаховы пространства, содержащие подпространства, изометричные (изоморфные) X и Y, а U и V — всевозможные изометрические (изоморфные) вложения X и Y в E.

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

Поступило в редакцию 16 августа 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П., Сб. трудов ин-та матем. АН УССР № 11 (1948), 97—112. 2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., УМН **XII**, вып. 2 (1957), 43—118. 3. Гохберг И. Ц., Маркус А. С., УМН **XIV**, вып. 5(1959), 135—140. 4. Гурарий В. И., Теория функций, функц. анализ и их прилож., вып. 1 (1965), 194—204. 5. Гурарий В. И., Сиб. матем. ж. 7, № 5 (1966), 1002—1013.