Функциональный анализ и его приложения,
т. 3, вып. 3, 1969, 71—74.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

М. И. Кадец

Функция $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в банаховом пространстве E называется (сильно) *почти периодической*, если множество ее сдвигов $x_\tau(t) = x(t+\tau)$ относительно компактно в метрике $\rho(x, y) = \sup\limits_t \|x(t) - y(t)\|$.

Бо́льшая часть предложений о числовых почти периодических функциях переносится на абстрактные функции [1], [2]. Одним из исключений является теорема об интегрировании или теорема Боля — Бора (см. [3], стр. 29): *если неопределенный интеграл числовой почти периодической функции ограничен, то он также есть почту периодическая функция.*

Будем говорить, что банахово пространство E *обладает свойством Боля — Бора*, если для каждой почти периодической функции $x(t)$ со значениями в E ограниченность интеграла

$$X(t) = \int_0^t x(\eta)\, d\eta \tag{1}$$

влечет его почти периодичность.

Известно, что пространство c (всех сходящихся числовых последовательностей) не обладает свойством Боля—Бора [2]. Приведем соответствующий пример:

$$x(t) = \left\{\frac{1}{2^n} \cos \frac{t}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2}$$

Интеграл этой функции $X(t) = \left\{\sin\frac{t}{2^n}\right\}_1^\infty$ — ограниченная, но не почти периодическая функция. Очевидно, свойством Боля — Бора не обладает никакое пространство, содержащее подпространство, изоморфное c. В работах [2] и [4] свойство Боля — Бора было установлено для некоторых классов банаховых пространств. Окончательное решение вопроса дает высказанная в [4] в виде гипотезы

Теорема 1. *Банахово пространство обладает свойством Боля — Бора в том и только в том случае, если оно не содержит подпространства, изоморфного пространству c.*

Заметим, что наше доказательство не опирается на теорему Боля — Бора, так что последняя оказывается следствием теоремы 1.

В связи с теоремой 1 возникает вопрос, какие же ограничения надо наложить на интеграл $X(t)$ в произвольном банаховом пространстве, чтобы он оказался почти периодической функцией. Раньше было известно [1], что для этого достаточно потребовать, чтобы множество значений $X(t)$ было сильно относительно компактным. Мы несколько усилим это предложение.

Теорема 2. *Если $x(t)$ — почти периодическая функция и множество значений интеграла слабо относительно компактно, то интеграл $X(t)$ — почти периодическая функция.*

Здесь будет приведено более простое доказательство, чем то, которое намечено в [4].

Для того чтобы облегчить дальнейшие рассуждения, сделаем одно очевидное замечание. Пусть M и N — метрические пространства, M_1 — плотное подмножество пространства M. Пусть, далее, f — отображение M_1 в N. Для каждой точки $a \in M$ мы можем определить колебание функции f:

$$\operatorname{osc}(f, a, \varepsilon) = \sup \rho(f(a'), f(a'')),$$

где верхняя грань берется по всем a', $a'' \in M_1$ таким, что $\rho(a^i, a) < \varepsilon$. Таким образом, мы можем говорить о непрерывности (или разрывности) функции в точке a, хотя функция в ней не определена.

Пусть $x(t)$ — почти периодическая функция со значениями в E. С помощью этой функции можно на числовой оси ввести новую метрику $\rho(t', t'') = \sup\limits_t \| x(t + t') - x(t + t'') \|$, относительно которой ось превращается в метрическое пространство J, пополнение которого K есть компакт.

Хорошо известно, что каждая функция (числовая или абстрактная), определенная на J и непрерывная в каждой точке компакта K, является почти периодической, если ее рассматривать как функцию, определенную на оси.

Интеграл (1) функции $x(t)$ можно рассматривать как функцию, определенную на J, значения которой лежат в E.

Лемма 1. *Если интеграл $X(t)$ непрерывен в какой-нибудь точке $\varkappa_0$ компакта K, то он непрерывен в каждой точке этого компакта.*

Доказательство. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, определим окрестность точки $\varkappa_0$, в которой колебание функции $X(t)$ меньше, чем $\varepsilon/4$; радиус этой окрестности обозначим δ. Выделим относительно плотную на оси последовательность $\{t^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ такую, что $\rho(t^{(i)}, \varkappa_0) < \delta/2$, $0 < t^{(n+1)} - t^{(n)} < l = l(\delta)$. Почти периодичность функции $x(t)$ обеспечивает существование такой последовательности. Пусть t_0 — произвольная точка множества J. Покажем, что в ее окрестности радиуса $\delta_1 = \min\{\delta/2;\ \varepsilon/4l\}$ колебание функции $X(t)$ меньше, чем ε. Возьмем в выделенной ранее последовательности точку $t^{(m)}$, для которой $t^{(m)} \leqslant t_0 < t^{(m+1)}$. Рассмотрим тождество

$$X(t) - X(t_0) = \{X(t^{(m)} + \tau) - X(t^{(m)})\} + \int\limits_{t^{(m)}}^{t_0} [x(\eta + \tau) - x(\eta)]\, d\eta, \qquad (3)$$

где t — произвольная точка из δ_1-окрестности точки t_0, $\tau = t - t_0$. Выражение в фигурных скобках на превосходит по норме $\varepsilon/4$, так как точки $t^{(m)} + \tau$ и $t^{(m)}$ лежат в δ-окрестности точки $\varkappa_0$:

$$\rho(t^{(m)}, \varkappa_0) < \delta/2, \qquad \rho(t^{(m)} + \tau, \varkappa_0) \leqslant \rho(t^{(m)} + \tau, t^{(m)}) + \rho(t^{(m)}, \varkappa_0) =$$

$$= \rho(t + \tau, t) + \rho(t^{(m)}, \varkappa_0) < \delta/2 + \delta_1 \leqslant \delta.$$

Оценим норму второго слагаемого:

$$\left\| \int\limits_{t^{(m)}}^{t_0} [x(\eta + \tau) - x(\eta)]\, d\eta \right\| \leqslant (t_0 - t^{(m)}) \sup_{\eta} \| x(\eta + \tau) - x(\eta) \| \leqslant$$

$$\leqslant l \cdot \rho(\tau, 0) \leqslant l\delta_1 \leqslant \varepsilon/4.$$

Таким образом, $\|X(t)-X(t_0)\|<\varepsilon/2$, и, значит, колебание $X(t)$ меньше ε. Так как δ_1 не зависит от выбора $t_0 \in J$, то $X(t)$ равномерно непрерывна на J, а значит, и на K.

Лемма 2. *Если в банаховом пространстве E есть расходящийся ряд $\sum x_k$, все частичные суммы которого ограничены в совокупности*

$$\left\|\sum x_{k_i}\right\| \leqslant A < \infty,$$

то E содержит подпространство, изоморфное c.

Это предложение принадлежит А. Пелчиньскому [5] (см. также [6]).

Лемма 3. *Если функция $F(s)$ со значениями в банаховом пространстве слабо непрерывна на некотором компакте S, то она имеет на S хотя бы одну точку сильной непрерывности.*

Это предложение принадлежит И. М. Гельфанду [7].

Доказательство теоремы 1. Допустим, что интеграл $X(t)$ не является почти периодической функцией, но $\|X(t)\| \leqslant G < \infty$. Согласно лемме 1, функция $X(t)$ разрывна в нуле множества J. Образуем последовательность $\{t_n\}_1^\infty \subset J$ такую, что

$$\|X(t_n)\| \geqslant a > 0, \quad \rho(t_n, 0)\sum_{k=1}^{n-1}|t_k| < 2^{-i}. \tag{4}$$

Пусть $\tau_k = t_{n_k}$ $(k=1,2,\ldots,m)$ — произвольные члены последовательности $\{t_n\}$. Рассмотрим тождество

$$X\left(\sum_1^m \tau_k\right) - \sum_1^m X(\tau_k) = \int_0^{\tau_1}[x(\eta+\tau_2)-x(\eta)]\,d\eta + \int_0^{\tau_1+\tau_2}[x(\eta+\tau_3)-x(\eta)]\,d\eta + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^{\tau_1+\ldots+\tau_{m-1}}[x(\eta+\tau_m)-x(\eta)]\,d\eta, \tag{5}$$

вытекающее, как и тождество (3), непосредственно из определения (1). Согласно (4) и (5), получаем, что $\left\|\sum_1^m X(\tau_k)\right\| \leqslant G+1 < \infty$. Таким образом, векторы $X(t_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ образуют расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами. Значит, по лемме 2, E содержит подпространство, изоморфное c. О справедливости второй части теоремы свидетельствует приведенный выше пример (2).

Доказательство теоремы 2. Пусть $x(t)$ — почти периодическая функция и множество значений интеграла $X(t)$ слабо компактно (а значит, и ограничено). Возьмем произвольный линейный функционал $f \in E^*$ и применим его к $x(t)$ и $X(t)$:

$$\Phi(t) = \langle f, X(t)\rangle = \left\langle f, \int_0^t x(\eta)\,d\eta\right\rangle = \int_0^t \langle f; x(\eta)\rangle\,d\eta = \int_0^t \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Функция $\varphi(t) = \langle f; x(t)\rangle$ почти периодическая, причем

$$|\varphi(t')-\varphi(t'')| \leqslant \|f\|\cdot\|x(t')-x(t'')\|. \tag{6}$$

Согласно теореме Боля—Бора, функция $\Phi(t)$ почти периодическая. Из (6) следует, что она равномерно непрерывна на J. Иначе говоря, функция $X(t)$ слабо равномерно непрерывна на J. Так как множество значений $X(t)$

слабо компактно, то мы можем доопределить ее на K как слабо непрерывную функцию $X(\varkappa) = w\text{-}\lim_{n\to\infty} X(t_n)$ $(\rho(t_n; \varkappa) \to 0)$, где «$w$-lim» — слабый предел. Согласно лемме 3, $X(\varkappa)$ имеет хотя бы одну точку сильной непрерывности и, следовательно, по лемме 1, сильно непрерывна на K. Это в свою очередь означает почти периодичность $X(t)$.

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

Поступила в редакцию 27 февраля 1969 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bochner S., Abstrakte fastperiodische Funktionen, Acta. Math. **61** (1933), 149—184.
2. Amerio L., Abstract almost-periodic functions and functional equations, Boll. Unione Mat. Ital. **20** (1965), 267—333.
3. Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., Гостехиздат, 1953.
4. Кадец М. И., Метод эквивалентных норм в теории абстрактных почти периодических функций, Studia Math. **31** (1968), 197—202.
5. Pelczynski A., On B-spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0, Bull. de l'Acad. Polon. sci. **5**, № 8 (1957), 797—798.
6. Pelczynski A., Proections in certain Banach spaces, Studia Math. **19** (1960), 209—228.
7. Гельфанд И. М., Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Матем. сб. **4** (1938), 235—286.