[23] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Annalen 77 (1916), p. 313-352.

[24] W. A. Woyczyński, *Ind-additive functionals on random vectors*, Dissertationes Mathematicae (to be printed).

[25] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Warszawa-Lwów, 1935.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE WROCŁAW UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 9. 2. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Метод эквивалентных норм в теории абстрактных почти периодических функций

М. И. КАДЕЦ (Харьков)

Функция $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, со значениями в банаховом пространстве E называется *почти периодической* (п. п. функцией), если она сильно непрерывна и если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon)$, что в любом интервале длины l найдется хотя бы один ε-почти период (ε-п. период) функции $x(t)$, tо-есть число τ такое, что

$$\sup_t \|x(t+\tau) - x(t)\| < \varepsilon \quad (-\infty < t < \infty).$$

Для числовых п. п. функций справедлива следующая теорема об интегрировании (см. [6], стр. 29):

Теорема Боля-Бора. *Если интеграл*

$$X(t) = \int_0^t x(\eta)\,d\eta \quad (-\infty < t < \infty) \tag{1}$$

п. п. функции $x(t)$ ограничен, то он также есть п. п. функция. Более точно: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, \varepsilon)$, что каждый ε_1-п. период функции $x(t)$ есть ε-п. период функции $X(t)$.

Л. Америо [1], [2] показал, что теорема Боля-Бора распространяется на абстрактные п. п. функции, если в качестве E взять равномерно выпуклое банахово пространство. Кроме того, он привел пример п. п. функции со значениями в пространстве c всех сходящихся числовых последовательностей

$$x(t) = \{\lambda_n \cos \lambda_n t\}_{n=1}^{\infty} \quad (\lambda_n \downarrow 0),$$

интеграл от которой

$$X(t) = \{\sin \lambda_n t\}_{n=1}^{\infty}$$

есть ограниченная, но не почти периодическая, функция.

Естественно, возникает задача выделения тех пространств Банаха, которые, подобно равномерно выпуклым пространствам, допускают обобщение теоремы Боля-Бора.

Гипотеза. *Если банахово пространство E не содержит подпространства изоморфного c, то для любой п. п. функции $x(t)$ со значениями в E ограниченность интеграла* (1) *влечет его почти периодичность.*

В этой статье будет доказано, повидимому, менее сильное утверждение.

Пусть E—пространство Банаха; E^*—его сопряженное; Γ—линейное подмножество E^*. Множество Γ называется *тотальным*, если из условия $f(x)=0$ для всех $f\in\Gamma$ следует $x=0$. Множество Γ называется *нормирующим*, если

$$\sup_{f\in\Gamma}\frac{|f(x)|}{\|f\|}=p(x)\geqslant a\|x\| \qquad (a>0).$$

Каждое нормирующее множество тотально. Обратное, вообще говоря, неверно.

Назовем E *слабо полным* относительно тотального множества $\Gamma\subset E^*$, если из условия

$$\lim_{m,n\to\infty}f(x_m-x_n)=0 \qquad \text{для всех } f\in\Gamma \tag{2}$$

следует существование такого $x\in E$, что

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x) \qquad \text{для всех } f\in\Gamma. \tag{3}$$

Лемма 1. *Если E слабо полно относительно Γ, то Γ—нормирующее множество.*

Доказательство. Пусть Γ—не нормирующее множество. Тогда функционал $p(x)$ является нормой в E, более слабой, чем исходная. Значит, существует последовательность $x_n\in E$, фундаментальная относительно нормы $p(\cdot)$, но не относительно исходной нормы. Очевидно, для этой последовательности выполнено (2), но не (3).

Предложение 1. *Если E—сепарабельное банахово пространство, а Γ—нормирующее множество, то в E можно ввести эквивалентную норму, относительно которой верно следующее: если*

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x) \qquad \textit{для всех } f\in\Gamma, \tag{4}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|\geqslant\|x\|. \tag{5}$$

Если же сверх (4) *предположить, что*

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

Это предложение доказано в [4] (см. также [5]).

До сих пор неизвестно, можно ли в предложении 1 ограничиться требованием тотальности Γ.

Лемма 2. *Пусть $x(t)$—п. п. функция со значениями в пространстве E, слабо полном относительно Γ и пусть интеграл* (1) *ограничен. Если для последовательности действительных чисел z_n выполнено*

$$\lim_{n\to\infty}\|x(t+z_n)-y(t)\|=0, \tag{6}$$

то: (а) *сходимость в* (6) *равномерна по t и $y(t)$—п. п. функция*; (б) *дял каждого $f\in\Gamma$*

$$\lim_{n\to\infty}f\big(X(t+z_n)\big)=f\big(Y(t)\big)$$

равномерно по t, причем

$$Y(t)=Y(0)+\int_0^t y(\eta)\,d\eta, \quad Y(t)\in E \qquad (-\infty<t<\infty).$$

Доказательство. Утверждение (а) следует из того, что по теореме Бохнера (см. [1], стр. 23), справедливой и для абстрактных п. п. функций, семейство сдвижек $\{x(t+z)\}$ компактно. Докажем утверждение (б). Для каждого $f\in\Gamma$ числовая функция $f\big(x(t)\big)$ почти периодична, причем каждый ε-п. период функции $x(t)$ есть также $\|f\|\cdot\varepsilon$-п. период функции $f\big(x(t)\big)$. Так как

$$f\big((X(t)\big)=\int_0^t f\big(x(\eta)\big)\,d\eta,$$

то числовая функция $f\big(X(t)\big)$ по теореме Боля-Бора почти периодична и предел

$$\lim_{n\to\infty}f\big(X(t+z)\big)$$

существует равномерно по t. Существование $Y(t)$ следует из слабой полноты пространства E относительно Γ.

Теорема 1. *Если сепарабельное банахово пространство E слабо полно относительно некоторого тотального множества $\Gamma\subset E^*$, то для любой п. п. функции $x(t)$ со значениями в E ограниченность интеграла* (1) *влечет его почти периодичность.*

Доказательство. Рассматриваемая теорема носит, очевидно, линейно-топологический характер; если она верна для пространства E, то она верна и для всех пространств ему изоморфных. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что в E введена эквивалентная норма, удовлетворяющая требованиям предложения 1. Сопоставим п. п. функции $x(t)$, фигурирующей в формулировке теоремы, множество J, образованное всевозможными сдвижками

$$\tilde{x}(z) \equiv x(t+z),$$

и введем на нем метрику:

$$\varrho\big(\tilde{x}(z'); \tilde{x}(z'')\big) = \sup_t \|x(t+z') - x(t+z'')\|.$$

Пополнив его, получим компакт K. Каждой точке этого компакта сопоставим элемент пространства E следующим образом. Если точка $\tilde{x}(z)$ принадлежит множеству J, то положим

$$X[\tilde{x}(z)] = X(z) = \int_0^Z x(\eta)\,d\eta;$$

если же точка $\tilde{y}$ принадлежит $K \setminus J$,

$$\tilde{y} = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}(z_k),$$

положим, опираясь на лемму 2,

$$Y[\tilde{y}] = \Gamma\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_0^{z_k} x(\eta)\,d\eta$$

(символом „Γ-lim" мы обозначаем предел на всех $f \in \Gamma$).

Легко проверить, что функция $Y[\tilde{y}]$ определена на K однозначно и что она слабо непрерывна в том смысле, что из $\tilde{y}_\nu \to \tilde{y}$ следует

$$\Gamma\text{-}\lim_{\nu\to\infty} Y[\tilde{y}_\nu] = Y[\tilde{y}].$$

Рассмотрим числовую функцию

$$\varphi(\tilde{y}) = \|Y[\tilde{y}]\|.$$

Эта функция согласно (4)-(5) полунепрерывна снизу и, следовательно, принадлежит первому бэровскому классу. По теореме Бэра существует точка $\tilde{y}_0$, в которой функция $\varphi(\tilde{y}_0)$ непрерывна. Согласно предложению 1 функция $Y[\tilde{y}]$ не только слабо, но и сильно непрерывна в этой точке. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, опишим вокруг $\tilde{y}_0$ шар радиуса δ, в котором колебания функции $Y[\tilde{y}]$ меньше, чем $\varepsilon/2$:

$$\|Y[\tilde{y}_1] - Y[\tilde{y}_2]\| < \varepsilon/2, \qquad \varrho(\tilde{y}_i, \tilde{y}_0) < \delta;\ i = 1, 2.$$

Из определения почти периодической функции вытекает существование последовательности $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$, $\tau_k < \tau_{k+1}$; $\tau_k \to \pm\infty$ при $k \to \pm\infty$ такой, что

$$(7) \qquad \varrho\big(\tilde{x}(\tau_k), \tilde{y}_0\big) < \delta/2; \quad 0 < \tau_{k+1} - \tau_k < l;\ l = l(\delta).$$

Вернемся к рассмотрению функций $x(t)$ и $X(t)$. Пусть число τ_0 является ε_1-п. периодом функции $x(t)$, где $\varepsilon_1 = \min\{\delta/2, \varepsilon/2l\}$. Покажем, что τ^0 есть ε-п. период функции $X(t)$. Возьмем произвольное действительное t; выделим τ_μ такое, что $\tau_\mu \leqslant t < \tau_{\mu+1}$. Рассмотрим разность

$$X(t+\tau^0) - X(t) = \{X(\tau_\mu + \tau^0) - X(\tau_\mu)\} + \int_{\tau_\mu}^{t} [x(\eta+\tau^0) - x(\eta)]\,d\eta.$$

Оценим норму первого слагаемого. Так как по определению ε_1-п. периода

$$\varrho\big(\tilde{x}(\tau_\mu + \tau^0), \tilde{x}(\tau_\mu)\big) < \varepsilon_1 \leqslant \delta/2,$$

а, согласно (7),

$$\varrho\big(\tilde{x}(\tau_\mu), \tilde{y}_0\big) < \delta/2,$$

то

$$\varrho\big(\tilde{x}(\tau_\mu + \tau^0), \tilde{y}_0\big) < \varepsilon_1 + \delta/2 \leqslant \delta.$$

Таким образом, $\tilde{x}(\tau_\mu + \tau^0)$ и $\tilde{x}(\tau_\mu)$ лежат в δ-окрестности точки $\tilde{y}_0$ и поэтому

$$\|X(\tau_\mu + \tau^0) - X(\tau_\mu)\| < \varepsilon/2.$$

Оценим норму интеграла:

$$\left\|\int_{\tau_\mu}^{t} [x(\eta+\tau^0) - x(\eta)]\,d\eta\right\| \leqslant (t - \tau_\mu)\cdot \sup_\eta \|x(\eta+\tau^0) - x(\eta)\| < l\cdot\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon/2.$$

Из полученных оценок следует, что для любого действительного t

$$\|X(t+\tau^0) - X(t)\| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если банахово пространство E — сепарабельное и сопряженное ($E = G^*$, G^* — банахово пространство), то для него верна теорема* 1.

Действительно, в этом случае E — слабо полно относительно $\Gamma = G$.

Следствие 2. *Если банахово пространство E (не обязательно сепарабельное) слабо полно в обычном смысле, то на него также распространяется теорема* 1.

Так как множество значений непрерывной функции сепарабельно, то вместо E достаточно рассмотреть его сепарабельное подпространство E_1, содержащее все значения функции. Теперь остается только заметить, что каждое подпространство слабо полного пространства также слабо полно.

С. Бохнеру [3] принадлежит следующее обобщение теоремы Боля-Бора:

Теорема Бохнера. *Если $x(t)$ п. п. функция со значениями в произвольном банаховом пространстве и если множество значений интеграла $X(t)$ относительно компактно, то $X(t)$ — п. п. функция.*

С помощью метода эквивалентных норм, примененного при доказательстве теоремы 1, можно усилить и этот результат.

Лемма 2а. *Утверждения леммы 2 справедливы и в том случае, если E произвольное банахово пространство, но множество значений интеграла (1) относительно слабо компактно.*

Действительно, мы можем полностью повторить рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2. Только при установлении существования $Y(t)$ нужно воспользоваться не слабой полнотой пространства E (которая в этом случае не предполагается), а слабой компактностью множества значений интеграла (1).

Теорема 2. *Пусть $x(t)$ п. п. функция со значениями в банаховом пространстве E. Если множество значений интеграла $X(t)$ слабо относительно компактно в E, то $X(t)$ — п. п. функция.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что E сепарабельно и что в нем введена эквивалентная норма, удовлетворяющая требованиям предложения 1 для $\Gamma = E^*$. Затем мы можем дословно повторить доказательство теоремы 1, воспользовавшись леммой 2а вместо леммы 2.

Цитированная литература

[1] L. Amerio, *Abstract almost-periodic functions and functional equations*, Boll. Unione Mat. Ital. 20 (1965), стр. 267-333.

[2] — *Sull'integratione delle funzioni quasi-periodiche astratte*, Ann. di Mat. 53 (1961), стр. 371-382.

[3] S. Bochner, *Abstrakte fastperiodische Funktionen*, Acta Math. 61 (1933), стр. 149-184.

[4] М. И. Кадец, *О связи между слабой и сильной сходимостью*, ДАН УССР 9 (1959), стр. 949-952 (на украинском языке).

[5] — и А. Пелчински, *Базисные последовательности, биортогональные системы и нормирующие множества в пространствах Банаха и Фреше*, Studia Math. 25 (1965), стр. 297-323.

[6] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Москва 1953.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren

von

ALBRECHT PIETSCH und HANS TRIEBEL (Jena)

Den Herren Stanislaw Mazur und Wladyslaw Orlicz gewidmet

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Theorie der vollständigen Normideale (= Banachideale) von beschränkten linearen Operatoren in Banachräumen. Wir benutzen das von A. P. Calderón und J. L. Lions entwickelte komplexe Interpolationsverfahren dazu, um für zwei beliebige Banachideale $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ eine Schar von Banachidealen $\boldsymbol{I}_\theta = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]_\theta$ mit $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ zu konstruieren. Ein besonders interessantes Resultat ergibt sich, wenn man zwischen dem Banachideal $\boldsymbol{L}$ aller beschränkten linearen Operatoren und dem Banachideal $\boldsymbol{N}$ der nuklearen Operatoren interpoliert. Es zeigt sich nämlich, daß die zu den Banachidealen $\boldsymbol{S}_r = [\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}]_{1/r}$ mit $1 \leqslant r \leqslant \infty$ gehörigen Operatoren als Verallgemeinerung der durch J. v. Neumann und R. Schatten im separablen Hilbertraum H eingeführten Operatoren der Klasse $\boldsymbol{S}_r(H, H)$ aufgefaßt werden können. Als Beispiele betrachten wir Einbettungsoperatoren in Sobolev-Slobodeckij-Räumen $\boldsymbol{W}_p^l$ und schwach singuläre Integraloperatoren in den Banachräumen $\boldsymbol{L}_p$.

1. Banachideale von beschränkten linearen Operatoren. Im folgenden ist $\boldsymbol{L}$ die Klasse aller beschränkten linearen Operatoren, die zwischen beliebigen komplexen Banachräumen $E, F, G, \ldots$ definiert sind. Die Teilmenge derjenigen Operatoren, die E in F abbilden, wird mit $\boldsymbol{L}(E, F)$ bezeichnet.

Eine Klasse $\boldsymbol{A}$ von Operatoren heißt *Ideal*, wenn die Mengen

$$\boldsymbol{A}(E, F) = \boldsymbol{L}(E, F) \cap \boldsymbol{A}$$

den folgenden Bedingungen genügen:

(A) Aus $S, T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ folgt $S + T \in \boldsymbol{A}(E, F)$.

(I_l) Aus $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{A}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{A}(E, G)$.

(I_r) Aus $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{A}(E, G)$.

Es zeigt sich, daß die Klasse $\boldsymbol{L}_0$ der Operatoren mit endlichdimensionalem Bildraum das kleinste eigentliche Ideal ist.