Функциональный анализ и его приложения,
т. 1, вып. 1, 1967, 61—70.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВСЕХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

М. И. Кадец

В 1928 г. М. Фреше [1] поставил вопрос: *гомеоморфны ли все сепарабельные бесконечномерные пространства Банаха?* В 1929 г. С. Мазур [2] показал, что все пространства L_p и $l_p (1 \leqslant p < \infty)$ гомеоморфны. Это был исторически первый пример не изоморфных, но гомеоморфных пространств Банаха. В 1933 г. С. Качмаж обобщил результат Мазура на пространства Орлича [3]. С. Банах [4] повторил вопрос Фреше и обратил внимание на некоторые частные случаи этой проблемы. С 1932 г. до 1953 г. была опубликована только одна работа [5], связанная с проблемой Фреше — Банаха.

С 1953 г. по 1960 г. автор этой статьи опубликовал ряд заметок [6] — [11], в которых устанавливался гомеоморфизм некоторых сепарабельных B-пространств. Результат заметки [9] — гомеоморфизм всех сепарабельных сопряженных B-пространств — был одновременно получен В. Кли [12]. Результаты заметок [6] — [9], [11], [12] устанавливались с помощью двух методов, которые можно назвать: *метод эквивалентных норм* и *метод координат*. В 1960 г. Ч. Бессага и А. Пелчинский [13] доказали следующую теорему:

Если бесконечномерное сепарабельное B-пространство содержит подпространство, гомеоморфное l_2, или допускает линейное непрерывное отображение на пространство, гомеоморфное l_2, то X гомеоморфно l_2.

Метод, которым пользовались Бессага и Пелчинский, восходит к К. Борсуку [14] и может быть назван *методом разложения*.

Данная статья посвящена подробному доказательству теоремы, дающей положительное решение проблемы Фреше — Банаха:

Теорема. *Все сепарабельные бесконечномерные пространства Банаха топологически эквивалентны.*

При доказательстве теоремы будут существенно использованы все указанные выше методы.

В сокращенном изложении это доказательство было опубликовано в [15] и доложено на Международном конгрессе математиков в Москве.

Мы не будем касаться здесь более широкой проблемы топологической классификации F-пространств и их подмножеств. Основные результаты и открытые вопросы, относящиеся к этой проблеме, опубликованы в обзорной статье Ч. Бессаги [16] (см. также тезисы доклада Ч. Бессаги, А. Пелчинского и В. Кли и доклада Р. Андерсона на конгрессе).

§ 1. Эквивалентные нормы

Пусть X — действительное B-пространство с базисом $\{e_k\}_1^\infty$; систему линейных функционалов, сопряженную базису, обозначим $\{f_k\}_1^\infty$. Таким образом, каждый элемент $x \in X$ представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, e_k.$$

Введем еще обозначения:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k; \qquad R_n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) e_k.$$

Обозначив исходную норму пространства X через $\|\cdot\|_0$, введем эквивалентную норму:

$$\|x\|_1 = \sup_{m,n} \left\| \sum_{m+1}^{n} f_k(x) e_k \right\|_0 .$$

Норма $\|\cdot\|_1$ обладает, как легко проверить, следующим свойством монотонности: для всех m, n $(1 \leqslant m < n \leqslant \infty)$ и для всех коэффициентов λ_k

$$\left\| \sum_{m+1}^{n} \lambda_k e_k \right\|_1 \leqslant \left\| \sum_{m}^{n+1} \lambda_k e_k \right\| . \tag{1}$$

Следующая эквивалентная норма вводится так:

$$\|x\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \|R_n x\|_1. \tag{2}$$

Эта норма сохраняет свойство (1). Покажем, что, кроме того, она удовлетворяет условиям: если для некоторых x_ν и x

$$\lim_{\nu\to\infty} f_n(x_\nu) = f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

то

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \|x_\nu\|_2 \geqslant \|x\|_2; \tag{4}$$

если же, кроме (3), выполнено еще условие

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x_\nu\|_2 = \|x\|_2, \tag{5}$$

то

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x_\nu - x\|_2 = 0. \tag{6}$$

Иначе говоря, единичный шар $U\{\|x\|_2 \leqslant 1\}$ замкнут относительно покоординатной сходимости, а на единичной сфере $S\{\|x\|_2 = 1\}$ покоординатная сходимость совпадает с сильной.

Лемма 1. *Из условия* (3) *следует, что*

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \|R_n x_\nu\|_1 \geqslant \|R_n x\|_1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Доказательство. Зафиксируем n и зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Выберем m настолько большим, чтобы

$$\|R_n x - S_m R_n x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{8}$$

Выберем, далее, ν_0 таким, что для всех $\nu \geqslant \nu_0$

$$\|S_m R_n x_\nu - S_m R_n x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{9}$$

Таким образом, из (8) и (9) находим

$$\| R_n x - S_m R_n x_\nu \|_1 < \varepsilon$$

и, значит,

$$\| R_n x \|_1 - \varepsilon < \| S_m R_n x_\nu \|_1 \leqslant \| R_n x_\nu \|_1,$$

что и доказывает лемму.

Из (2) и (7) следует свойство (4). Сопоставляя (2), (5) и (7), видим, что условия (3) и (5) влекут за собой следующую систему равенств:

$$\lim_{\nu \to \infty} \| R_n x_\nu \|_1 = \| R_n x \|_1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Лемма 2. *Множество* $\{x_\nu\}$, *подчиненное требованию* (10), *компактно.*

Доказательство. Задавшись $\varepsilon > 0$, определим n_0, а затем ν_0 так, чтобы

$$\| R_{n_0} x \|_1 < \frac{\varepsilon}{2}; \ \| R_{n_0} x_\nu - R_{n_0} x \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\nu \geqslant \nu_0),$$

откуда

$$\| R_{n_0} x_\nu \|_1 < \varepsilon \qquad (\nu \geqslant \nu_0).$$

Заменим n_0 бо́льшим индексом n_1 так, чтобы последнее неравенство распространилось на $\nu < \nu_0$. Согласно условию монотонности базиса (1), получаем

$$\| R_n x_\nu \|_1 < \varepsilon \ (\nu = 1, 2, \ldots; \ n \geqslant n_1(\varepsilon)),$$

то есть норма остатка базисного разложения стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по ν. Доказательство завершается ссылкой на критерий компактности в B-пространствах с базисом [17, стр. 247].

Компактность последовательности $\{x_\nu\}$ в соединении с покоординатной сходимостью влечет сильную сходимость. Таким образом, свойства нормы $\| \cdot \|_2$ проверены. Эта норма была введена в [18].

Построим, наконец, эквивалентную норму $\| \cdot \|$, с которой и будем иметь дело в дальнейшем:

$$\| x \| = \sqrt{\| x \|_2^2 + J^2(x)}; \qquad J(x) = \sqrt{\sum_1^\infty 2^{-k} \left(\frac{f_k(x)}{\| f_k \|_2} \right)^2}. \tag{11}$$

Очевидно, эта норма также обладает свойством (1). Проверим еще, что для нее из (3) и (5) следует (6). Действительно, пусть выполнено (3) и

$$\lim_{\nu \to \infty} \| x_\nu \| = \| x \|. \tag{5a}$$

Из определения $J(x)$ следует, что

$$\varliminf_{\nu \to \infty} J(x_\nu) \geqslant J(x). \tag{12}$$

Так как, кроме того, из (3) следует (4), то, сопоставляя (4), (12), (11) и (5a), видим, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \| x_\nu \|_2 = \| x \|_2 \tag{5}$$

и, значит, согласно свойствам нормы $\| \cdot \|_2$, справедливо (6). Так как нормы

$\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, то

$$\lim_{\nu\to\infty}\|x_\nu - x\| = 0.$$

Определение. Пространство Банаха называется *локально равномерно выпуклым*, если из условий

$$\|x_\nu\| = \|x\| = 1, \qquad \lim_{\nu\to\infty}\|x_\nu + x\| = 2 \tag{13}$$

следует, что

$$\lim_{\nu\to\infty}\|x_\nu - x\| = 0.$$

Покажем, что пространство X локально равномерно выпукло относительно нормы (11). Условия (13) запишем согласно (11) в виде

$$\|x_\nu\|_2^2 + J^2(x_\nu) = \|x\|_2^2 + J^2(x) = 1, \tag{14}$$

$$\lim_{\nu\to\infty}[\|x_\nu + x\|_2^2 + J^2(x_\nu + x)] = 4. \tag{15}$$

Сложим два очевидных соотношения:

$$J^2(x_\nu - x) + J^2(x_\nu + x) = 2\,[J^2(x_\nu) + J^2(x)],$$

$$\|x_\nu + x\|_2^2 \leqslant 2\,[\|x\|_2^2 + \|x_\nu\|_2^2]$$

и получим

$$J^2(x_\nu - x) + [\|x_\nu + x\|_2^2 + J^2(x_\nu + x)] \leqslant$$

$$\leqslant 2\,[\|x_\nu\|_2^2 + J^2(x_\nu)] + 2\,[\|x\|_2^2 + J^2(x)]. \tag{16}$$

Сопоставляя (14), (15) и (16), получаем

$$\lim_{\nu\to\infty} J(x_\nu - x) = 0. \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$\lim_{\nu\to\infty} J(x_\nu) = J(x);\ \lim_{\nu\to\infty} f_n(x_\nu) = f_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Сопоставляя первое из условий (18) и (14), видим, что

$$\lim_{\nu\to\infty}\|x_\nu\| = \|x\|_2. \tag{5}$$

Для $\|\cdot\|_2$ из покоординатной сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость, что и доказывает локальную равномерную выпуклость пространства $(X, \|\cdot\|)$. Норма (11) была рассмотрена в [19]. Доказательство эквивалентности всех рассмотренных норм не представляет труда.

Резюмируя все доказанное в этом параграфе, получим

Предложение 1. *В пространстве Банаха с базисом* $\{e_k\}_1^\infty$ *существует эквивалентная норма* $\|\cdot\|$, *обладающая следующими свойствами:*

а) *базис относительно этой нормы ортогонален:*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k\right\| < \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| \qquad (a_n \neq 0;\ n = 1, 2, \ldots);$$

б) *на единичной сфере покоординатная сходимость совпадает со сходимостью по норме;*

в) *пространство локально равномерно выпукло.*

§ 2. Локальный модуль выпуклости

Рассмотрим функционал

$$\omega(x, \delta) = \frac{1}{2} \sup_{z \in G(x,\delta)} \| x - z \| \qquad (\| x \| = 1;\ 0 \leqslant \delta \leqslant 1), \tag{19}$$

где

$$G(x, \delta) = \left\{ z:\quad \| z \| \leqslant 1;\quad \min_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \| \lambda x + (1 - \lambda) z \| \geqslant 1 - \delta \right\}. \tag{20}$$

Для всех δ локальный модуль выпуклости $\omega(x, \delta)$ удовлетворяет неравенствам

$$\delta \leqslant \omega(x, \delta) \leqslant \omega(x, \delta_1) \leqslant \omega(x, 1) = 1 \qquad (\delta \leqslant \delta_1 \leqslant 1).$$

Если пространство локально равномерно выпукло, то

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(x, \delta) = 0. \tag{21}$$

Лемма 3. *Локальный модуль выпуклости удовлетворяет условиям*

$$\omega(x, \delta + h) - \omega(x, \delta) \leqslant \frac{2h}{\delta^2} \qquad (0 < \delta \leqslant \delta + h \leqslant 1), \tag{22}$$

$$\omega(x, \delta) \leqslant \frac{1}{2} \| x - y \| + \omega(y, \delta + \| x - y \|) \quad (0 < \delta < \delta + \| x - y \| \leqslant 1). \tag{23}$$

Доказательство. Согласно определению локального модуля выпуклости неравенство (22) достаточно проверить для произвольного двумерного сечения единичной сферы, содержащего центр сферы и точку x. Сведéние к двумерному пространству позволяет обратиться к чертежу. На рис. 1 изображены концентрические сферы радиуса 1 и $1 - \delta$. Множество $G(x, \delta)$ заштриховано. Расстояние от прямой xz_1 до центра θ равно $1 - \delta - h$. Нужно оценить сверху разность $\| x - z_1 \| - \| x - z \|$. Введем систему координат: ось $\theta\xi$ проходит через точку v касания хорды xz и внутренней окружности; ось $\theta\eta$ параллельна хорде xz. Запишем координаты нужных нам точек:

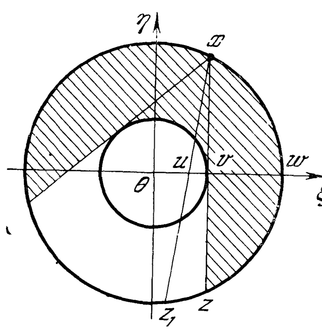

Рис. 1

$$x(1 - \delta,\ \omega^+);\ \ y(1 - \delta,\ -\omega^-);$$
$$u(1 - \delta_1, 0);\ \ v(1 - \delta, 0);\ \ w(1,\ 0),$$

где ω^+ и ω^- — длины отрезков xv и vz, так что

$$\delta \leqslant \omega^\pm \leqslant 1;\ \ \delta \leqslant \delta_1 \leqslant \delta + h; \qquad \omega^+ + \omega^- = 2\omega.$$

На рис. 2 показана «наихудшая» при заданных $\omega^\pm$ и δ единичная сфера: на ней $\| x - z_1 \|$ достигает наибольшего из возможных значений. Применяя обычные приемы аффинной аналитической геометрии (соответствующие довольно громоздкие выкладки мы опускаем), можно получить

$$\| x - z_1 \| = 2 \min \left\{ 1;\ \omega \cdot \frac{\delta}{1 - \delta} \cdot \frac{(1 - \delta - h)\,\omega^+ + h}{\delta\omega^+ - h\omega^-} \right\},$$

откуда после ряда преобразований, направленных на устранение величин $\omega^\pm$ и упрощение полученного выражения, приходим к неравенству (22).

Неравенство (23) удобнее установить аналитически. Пусть x и y — близкие точки единичной сферы ($\|x-y\|<1-\delta$). Из неравенства

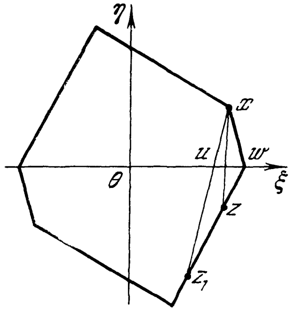

Рис. 2.

$$\|\lambda y+(1-\lambda)z\|\geqslant\|\lambda x+(1-\lambda)z\|-\lambda\|x-y\|\geqslant$$
$$\geqslant 1-(\delta+\|x-y\|)\ (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$$

следует включение:

$$G(x,\delta)\subset G(y,\delta+\|x-y\|),$$

откуда согласно определению $\omega(x,\delta)$ получается неравенство (23).

Из (22), (23) и (21) непосредственно вытекает необходимое для дальнейшего

Предложение 2. *В любом пространстве Банаха локальный модуль выпуклости $\omega(x,\delta)$ равномерно непрерывен на множестве $S\times[\delta_0;\ 1]$ (S — единичная сфера пространства). Если же пространство локально равномерно выпукло, то $\omega(x,\delta)$, сверх того, непрерывен на множестве $S\times[0;1]$* $(0<\delta_0<1)$.

Результаты этого параграфа получены автором совместно с В. И. Гурарием.

§ 3. Вспомогательные построения

На единичном шаре пространства X определим функционал

$$\Phi(x)=\omega\left(\frac{x}{\|x\|};\ 1-\|x\|\right);\ \Phi(\theta)=1. \tag{24}$$

Из результатов § 2 следует, что этот функционал непрерывен на единичном шаре $U\{\|x\|\leqslant 1\}$ и равномерно непрерывен на каждом шаре $U\{\|x\|\leqslant 1-\delta_0\}$; на единичной сфере функционал $\Phi(x)=0$, а внутри ее выполняется неравенство

$$1-\|x\|\leqslant\Phi(x)\leqslant 1.$$

Лемма 4. *Если числа $\{a_k\}_1^\infty$ таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(s_n)=0\qquad\left(s_n=\sum_1^n a_ke_k\right), \tag{25}$$

то ряд Σa_ke_k сходится.

Доказательство. Из условий (1) и (25) следует, в частности, что

$$\|s_1\|\leqslant\|s_2\|\leqslant\ldots;\quad \lim_{n\to\infty}\|s_n\|=1. \tag{26}$$

Покажем, что при любом n все элементы s_m $(m\geqslant n)$ принадлежат множеству $G(s_n/\|s_n\|;\ 1-\|s_n\|)$. Действительно,

$$\|\lambda s_n\cdot\|s_n\|^{-1}+(1-\lambda)s_m\|\geqslant\|\lambda s_n\cdot\|s_n\|^{-1}+(1-\lambda)s_n\|=$$
$$=\|s_n\|\cdot[\lambda\|s_n\|^{-1}+(1-\lambda)]\geqslant\|s_n\|\qquad(0\leqslant\lambda\leqslant 1),$$

откуда и следует требуемое включение. Условие (25) означает, что диаметр множества $G(s_n/\|s_n\|;\ 1-\|s_n\|)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Значит, последовательность $\{s_n\}_1^\infty$ фундаментальна и, таким образом, ряд Σa_ke_k сходится к некоторому нормированному элементу.

Для каждого элемента $x \in U\{\|x\| \leqslant 1\}$ рассмотрим ломаную (вообще говоря, бесконечнозвенную), соединяющую последовательно точки θ, S_1x, S_2x, ...; присоединим к ней сам элемент x и полученное замкнутое множество (гомеоморфное отрезку) обозначим $L(x)$. Определим функционал $F(x)$, который будет участвовать в дальнейших построениях:

$$F(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\|x\|\right) \min_{z \in L(x)} \Phi(z) \qquad (\|x\| \leqslant 1). \tag{27}$$

Этот функционал непрерывен, удовлетворяет неравенству

$$\left(1 - \frac{1}{2}\|x\|\right)(1 - \|x\|) \leqslant F(x) \leqslant 1$$

и обращается в нуль на единичной сфере.

Покажем, что лемма 4 справедлива также для функционала $F(x)$. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} F(s_n) = 0 \qquad \left(s_n = \sum_1^n a_k e_k\right).$$

Это означает, что для каждого n найдется $\nu = \nu(n) \leqslant n$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(s_{\nu-1} + \lambda_\nu e_\nu) = 0 \qquad (0 \leqslant |\lambda_\nu| \leqslant |a_\nu|).$$

Согласно (26) ν неограниченно возрастает вместе с n. Повторяя почти дословно рассуждения леммы 4, получим, что выражение $s_{\nu-1} + \lambda_\nu e_\nu$ стремится с ростом ν к некоторому нормированному элементу, базисным разложением которого является ряд $\Sigma a_k e_k$.

Предложение 3. *На единичном шаре пространства X можно определить непрерывный функционал $F(x)$, обладающий следующими свойствами:*

а) $F(x) > 0$ *при* $\|x\| < 1$; $F(x) = 0$ *при* $\|x\| = 1$; $F(\theta) = 1$;

б) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(\sum\limits_1^n a_k e_k\right) = 0$, *то ряд* $\Sigma a_k e_k$ *сходится*;

в) *при фиксированных* n *и* $\{a_k\}_1^{n-1}$ *функция*

$$\psi(\alpha) = F\left(\sum_1^{n-1} a_k e_k + \alpha e_n\right)$$

строго возрастает при $\alpha < 0$ *и строго убывает при* $\alpha > 0$.

Доказательство. Таким функционалом является $F(x)$, определенный формулой (27). Свойства (а) и (б) уже установлены. Докажем (в). Пусть $|\alpha_1| < |\alpha_2|$; $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0$. Тогда

$$\|s_{n-1} + \alpha_1 e_n\| < \|s_{n-1} + \alpha_2 e_n\| \tag{28}$$

в силу ортогональности базиса и

$$L(s_{n-1} + \alpha_1 e_n) \subset L(s_{n-1} + \alpha_2 e_n), \tag{29}$$

по определению множества $L(x)$. Из (27)—(29) получаем, что $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$.

§ 4. Гомеоморфизм пространств с базисом

Поставим в соответствие каждому нормированному элементу $x \in X$ числовую последовательность

$$h_n(x) = [F^2(S_{n-1}x) - F^2(S_n x)]^{1/2} \operatorname{sign} f_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{30}$$

Лемма 5. *Если x — элемент единичной сферы, то* $\sum\limits_1^\infty h_n^2(x) = 1$. *Каковы бы ни были действительные числа* $\{h_n\}_1^\infty$, *подчиненные условию* $\Sigma h_n^2 = 1$, *найдется единственный нормированный элемент x такой, что*

$$h_n(x) = h_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Первая часть леммы проверяется непосредственно. Займемся второй ее частью. Выберем коэффициент a_1 так, чтобы

$$1 - F^2(a_1 e_1) = h_1^2, \qquad \operatorname{sign} a_1 = \operatorname{sign} h_1. \tag{31_1}$$

Когда коэффициенты $\{a_k\}_1^{n-1}$ уже определены, определяем a_n из условий

$$F^2(s_{n-1}) - F^2(s_{n-1} + a_n e_n) = h_n^2, \qquad \operatorname{sign} a_n = \operatorname{sign} h_n. \tag{31_n}$$

Согласно свойству (в) функционала $F(x)$ каждый коэффициент a_k определяется единственным образом. Суммируя (31_n) и учитывая условие $\Sigma h_n^2 = 1$, убеждаемся, что $\lim\limits_{n\to\infty} F(s_n) = 0$. Значит, по свойству (б) ряд $\Sigma a_k e_k$ сходится, а его сумма является искомым нормированным элементом x.

Лемма 6. *Нормированная последовательность x_ν сходится к элементу x в том и только в том случае, если*

$$\lim_{\nu\to\infty} h_n(x_\nu) = h_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Доказательство. Если $x_\nu \to x$, то (32) вытекает из непрерывности $F(x)$. Пусть теперь выполнено (32). Рассматривая это равенство последовательно при $n = 1, 2, \ldots$, убеждаемся, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_n(x_\nu) = f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как, кроме того, $\|x_\nu\| = \|x\| = 1$, то, согласно свойству (б), нормы пространства X, $x_\nu \to x$.

Предложение 4. *Пространство X гомеоморфно пространству l_2.*

Доказательство. Из леммы 5 следует, что сопоставляя каждому нормированному элементу $x \in X$ последовательность его координат

$$Hx = \{h_n(x)\}_{n=1}^\infty \qquad (\|x\| = 1),$$

мы приводим во взаимно однозначное соответствие сферы пространств X и l_2. Покажем, что соответствие H есть гомеоморфизм. Заметим для этого, что естественная норма пространства l_2 удовлетворяет условиям а) — в) предложения 1, и что в l_2 можно положить $F(y) = \sqrt{1 - \|y\|^2}$. Рассмотрим сходящуюся последовательность нормированных элементов пространства X:

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x; \qquad \|x_\nu\| = \|x\| = 1. \tag{33}$$

Из (33) следует, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_n(x_\nu) = h_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, откуда, согласно соответствию H,

$$\lim_{\nu\to\infty} h_n(y_\nu) = h_n(y) \quad (y_\nu = Hx_\nu;\ y = Hx). \tag{34}$$

Согласно лемме 6 из (34) следует $\lim\limits_{\nu\to\infty} y_\nu = y$, что доказывает непрерывность отображения H. Непрерывность обратного отображения H^{-1} доказывается аналогично.

Гомеоморфизм H распространяется со сферы на все пространство по формуле

$$y = \|x\| \cdot H(x / \|x\|);\ H(\theta) = \theta \qquad (x \in X;\ y \in l_2).$$

Так как эквивалентное изменение нормы B-пространства не влияет на его топологию, то из предложения 4 следует топологическая эквивалентность всех бесконечномерных B-пространств с базисом.

§ 5. Гомеоморфизм всех сепарабельных бесконечномерных B-пространств

Результат предложения 4 надо теперь распространить на пространства без базиса (существование их до сих пор не доказано и не опровергнуто).

Так как каждое бесконечномерное B-пространство содержит бесконечномерное подпространство с базисом, то искомый гомеоморфизм следует из теоремы Бессаги — Пелчинского, сформулированной во введении.

Для полноты изложения мы проведем доказательство нужного нам результата.

Введем в рассмотрение произведение B-пространств со счетным или конечным числом сомножителей:

$$Z = Z_1 \times Z_2 \times Z_3 \times \ldots$$

Это есть B-пространство, элементами которого являются последовательности

$$z = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}, \quad z_n \in Z_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 0,$$

с нормой $\|z\| = \max\limits_n \|z_n\|$ и с почленным сложением и умножением на скаляр. Отметим следующие изометрические (и тем более гомеоморфные) соответствия:

$$c_0 = c_0 \times c_0 = c_0 \times c_0 \times c_0 \times \ldots, \tag{35}$$

где c_0 есть B-пространство всех числовых последовательностей, сходящихся к нулю.

Приведем без доказательства предложение [12], являющееся простым следствием теоремы Бартла — Грейвса [20].

Лемма 7. *Если Z — банахово пространство, а Z_1 — его подпространство, то*

$$Z \sim Z_1 \times Z/Z_1$$

(символом $\sim$ обозначаем гомеоморфизм).

Рассмотрим, наконец, бесконечномерное сепарабельное B-пространство X, не подчиненное никаким дополнительным ограничениям. Пусть Y — его бесконечномерное подпространство с базисом; фактор-пространство X / Y обозначим Z. Так как пространства c_0 и C (пространство непрерывных на отрезке функций) имеют базис, то

$$Y \sim C \sim c_0 \sim c_0 \times c_0 \sim c_0 \times c_0 \times c_0 \times \ldots \tag{36}$$

Применяя лемму 7 и соотношения (36), получаем

$$X \sim Y \times Z \sim (c_0 \times c_0) \times Z \sim c_0 \times (c_0 \times Z) \sim c_0 \times (Y \times Z) \sim C \times X. \tag{37}$$

Так как C — универсальное пространство ([17], стр. 256), то оно содержит подпространство X_1, изометричное X. Поэтому

$$C \sim X \times W \sim c_0 \qquad (W = C / X_1). \tag{38}$$

Из (36) и (38) получаем

$$C \sim c_0 \times c_0 \times c_0 \times \ldots \sim (X \times W) \times (X \times W) \times (X \times W) \times \ldots \sim$$
$$\sim X \times (W \times X) \times (W \times X) \times \ldots \sim X \times (c_0 \times c_0 \times c_0 \times \ldots) \sim X \times C. \tag{39}$$

Сопоставляя (37) и (39), приходим к требуемому гомеоморфизму:

$$X \sim C.$$

Мы показали, таким образом, что все сепарабельные бесконечномерные пространства Банаха (с базисом или без него) гомеоморфны.

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

Поступило в редакцию 9 октября 1966 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Fréchet M., Les espaces abstraits, Paris, 1928.
2. Mazur S., Une remarque sur l'homeomorphie des champs fonctionels, Studia Math. **1** (1929), 83—85.
3. Kaczmarz S., The homeomorphy of certain spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. (1933), 145—148.
4. Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, «Радянська школа», 1948.
5. Stone M. H., Notes on integration II, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **34** (1948), 447—455.
6. Кадец М. И, О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха, ДАН СССР **92**, № 3 (1953), 465—468.
7. Кадец М. И., О топологической эквивалентности равномерно выпуклых пространств, УМН, **10**, вып. 4 (1955), 137—141.
8. Кадец М. И., О слабой и сильной сходимости, ДАН СССР **122**, № 1 (1958), 13—16.
9. Кадец М. И., Про зв'язок між слабою та сильною збіжністю, ДАН УРСР № 9 (1959), 949—952.
10. Кадец М. И. и Левин Б. Я., Решение задачи С. Банаха о топологической эквивалентности пространств непрерывных функций, Тр. семин. по функц. анализу, Воронеж, № 3—4 (1960), 20—25.
11. Кадец М. И., Топологическая эквивалентность некоторых конусов банахова пространства, УМН **20**, вып. 3 (1965), 183—187.
12. Klee V. L., Mappings into normed linear spaces, Fund. Math. **49** (1960), 286—290.
13. Bessaga C., Pelczynski A., Some remarks on homeomorphisms of B-spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), 757—760.
14. Borsuk K., Über Isomorphie der Funktionenräume, Bull. Acad. Polon. Sci. (1933), 1—18.
15. Кадец М. И., Топологическая эквивалентность всех сепарабельных пространств Банаха, ДАН СССР **167** (1966), 23—25.
16. Bessaga C., On topological classification on complete linear metric spaces, Fund. Math. **56** (1965), 251—288.
17. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, изд. 2-е, М., «Наука», 1965.
18. Кадец М. И., О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым, Изв. Вузов, сер. матем. № 6 (1958), 51—57.
19. Кадец М. И., Письмо в редакцию. Изв. Вузов, сер. матем. № 6 (1961), 186—187.
20. Bartle R. G., Graves L. M., Mappings between function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 400—413.