1965 г. май-июнь *т. XX, вып. 3 (123)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ НОРМЫ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

М. И. Кадец

Норма банахова пространства E называется дифференцируемой по Гато, если

$$\|x+ty\| = \|x\| + tf_x(y) + \omega(x, ty) \qquad (x \neq \theta;\ \|y\| = 1;\ f_x \in E^*), \tag{1}$$

причем функционал $\omega(x, ty)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to 0} \frac{\omega(x, ty)}{t} = 0. \tag{2}$$

Если же условие (2) выполнено равномерно по всем нормированным y, то говорят, что норма дифференцируема по Фреше (см. [1], стр. 187, 189). Из определения (1) и (2) следует [2], что

$$\|f_x\| = 1, \qquad f_x(x) = \|x\| = 1.$$

Геометрически дифференцируемость по Гато означает гладкость, а по Фреше — локально равномерную гладкость единичной сферы.

Назовем размерностью метрического пространства X наименьшую мощность его всюду плотного множества и обозначим ее $\dim X$, мощность множества X обозначим $\operatorname{card} X$.

Теорема 1. *Если норма банахова пространства дифференцируема по Гато, то его мощность не меньше размерности сопряженного пространства*

$$\operatorname{card} E \geqslant \dim E^*. \tag{3}$$

Теорема 2[1]). *Если норма банахова пространства дифференцируема по Фреше, то его размерность равна размерности сопряженного пространства*

$$\dim E = \dim E^*. \tag{4}$$

[1]) Сообщение об этом результате содержится в обзорном докладе Я. Б. Рутицкого и автора на IV Всесоюзном математическом съезде (Ленинград, 1961).

Доказательство этих теорем базируется на предложении, принадлежащем Бишопу и Фелпсу [3].

Предложение 1. *Множество нормированных линейных функционалов, определенных в банаховом пространстве E и достигающих своей верхней грани на его единичной сфере S, всюду плотно в единичной сфере S^* сопряженного пространства.*

Доказательство теоремы 1. Так как норма E дифференцируема по Гато, то отображение (градиент нормы) $\Gamma x = f_x$, сопоставляющее каждому нормированному элементу $x \in E$ линейный функционал f_x из определения (1), однозначно. Значит, мощность множества значений оператора Γ не больше мощности единичной сферы пространства E:

$$\operatorname{card} S \geqslant \operatorname{card} \Gamma S.$$

Множество ΓS, согласно предложению 1, всюду плотно в S^*, значит,

$$\operatorname{card} \Gamma S \geqslant \dim S^*.$$

Так как $\operatorname{card} S = \operatorname{card} E$, а $\dim S^* = \dim E^*$, то

$$\operatorname{card} E \geqslant \dim E^*,$$

что и доказывает теорему 1.

Следствие 1. *В пространствах $l(T)$*[1]) *при несчетном T и $m(T)$ при бесконечном T не существует эквивалентной нормы, дифференцируемой по Гато.*

Для доказательства достаточно убедиться, что в этих пространствах (а следовательно, и в пространствах им изоморфных) не выполняется неравенство (3). Другим путем этот результат получил Дэй в [4].

Для доказательства теоремы 2 потребуются вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть норма банахова пространства E дифференцируема по Фреше. Тогда для каждого $x \in E$ диаметр множества*

$$K(x, \delta) = \{f\colon\ f \in E^*;\ \|f\| = 1;\ f(x) \geqslant (1-\delta)\|x\|\}$$

неограниченно убывает при $\delta \to 0$.

Это предложение доказано В. Л. Шмульяном [5].

Лемма 2. *Если норма дифференцируема по Фреше, то ее градиент Γ — непрерывный оператор.*

Доказательство. Пусть последовательность $x_k \in E$ сходится к x ($\|x_k\| = \|x\| = 1$). Тогда, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_k - x) = 0,$$

где $f_k = \Gamma x_k$. Значит, начиная с некоторого k, $1 - f_k(x) < \delta$ и все f_k попадают в множество $K(x, \delta)$. Согласно лемме 1

$$\lim_{n\to\infty} \|\Gamma x_k - \Gamma x\| = 0,$$

что и доказывает непрерывность оператора Γ.

---

[1]) Относительно обозначений см. [1], стр. 52.

Доказательство теоремы 2. Согласно предложению 1 и лемме 2 оператор Γ отображает единичную сферу S пространства E на всюду плотное подмножество единичной сферы S^* сопряженного пространства. Значит,

$$\dim S \geqslant \dim S^*;$$

так как размерность сферы совпадает с размерностью всего пространства, а размерность E^* не меньше размерности E [6], то $\dim E = \dim E^*$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает, например, необходимое условие дифференцируемости нормы в подпространстве E_M пространства Орлича, определенным образом дополняющее известные достаточные условия ([7], стр. 215—221).

Следствие 2. *Пусть $M(u)$ и $N(u)$ сопряженные N-функции и $N(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда в E_M не существует эквивалентной нормы, дифференцируемой по Фреше.*

Действительно, пространство E_M сепарабельно, в то время как сопряженное пространство L_N^* не сепарабельно, так как не удовлетворяет Δ_2-условию. Значит, в E_M (и в любом изоморфном пространстве) невыполнено необходимое условие дифференцируемости нормы.

Покажем еще, что для сепарабельных банаховых пространств условие теоремы 2 является в определенном смысле и достаточным.

Предложение 2. *Пусть X — сепарабельное пространство Банаха; X^* — его сопряженное; линейное множество $G \subset X^*$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{x \in X} \sup_{f \in G} \frac{|f(x)|}{\|f\| \cdot \|x\|} = \eta > 0.$$

Тогда в X можно ввести эквивалентную норму ($\|\ \|_0$), обладающую следующими свойствами: если

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x) \quad \textit{для всех} \quad f \in G,$$

то

$$\varliminf_{k \to \infty} \|x_k\|_0 \geqslant \|x\|_0;$$

если же, сверх того,

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k\|_0 = \|x\|_0,$$

то

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Это предложение доказано в [8].

Лемма 3. *Пусть в пространстве E^*, сопряженном к сепарабельному банахову пространству E, введена эквивалентная норма $\|f\|'$. Для того, чтобы E^* в новой норме было сопряженным к E в норме*

$$\|x\|' = \sup_{f \in E^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|'},$$

достаточно, чтобы из

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ для всех } x \in E \tag{5}$$

следовало

$$\varliminf_{k\to\infty} \| f_k \|' \geqslant \| f \|'. \tag{6}$$

Доказательство. Мы должны доказать, что

$$\| f \|'' = \sup_{x\in E} \frac{| f(x) |}{\| x \|'} = \| f \|'.$$

Согласно условию (5) и (6) функционал $\| f \|'$ полунепрерывен сверху в слабой топологии сопряженного пространства. Значит, множество

$$U' = \{f\colon \| f \|' \leqslant 1,\ f \in E^*\}$$

замкнуто в той же топологии, т. е. для каждого f ($\| f \|' = 1$) и $\lambda > 1$ найдется $x_\lambda \in E$ такой, что

$$\lambda_f(x_\lambda) > \sup_{\varphi\in U'} | \varphi(x_\lambda) |. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$\| f \|'' = \sup_{x\in E} \frac{| f(x) |}{\sup\limits_{\varphi\in U'} | \varphi(x) |} \geqslant 1.$$

Так как, с другой стороны,

$$\| f \|' = \sup_{x\in E} \frac{| f(x) |}{\sup\limits_{\varphi\in U'} | \varphi(x) |} \leqslant \sup_{x\in E} \frac{| f(x) |}{| f(x) |} = 1,$$

то

$$\| f \|'' = \| f \|' \qquad \text{для всех } f \in E^*,$$

что и доказывает лемму.

Теорема 3. *Если сопряженное пространство E^* сепарабельно, то в E можно ввести эквивалентную норму, дифференцируемую по Фреше.*

Доказательство. Введем в E^* эквивалентную норму $\| f \|_1$, относительно которой оно станет локально равномерно выпуклым [9] и в то же время останется сопряженным к пространству (E, $\| \ \|_1$), где эквивалентная норма $\| x \|_1$ определена равенством

$$\| x \|_1 = \sup_{f\in E^*} \frac{| f(x) |}{\| f \|_1}.$$

Согласно теореме Ловалья [9] норма $\| x \|_1$ при этом окажется дифференцируемой по Фреше. Норму $\| f \|_1$ определим так:

$$\| f \|_1 = \sqrt{\| f \|_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} | f(x_k) |^2},$$

где $\{x_k\}$ — счетное всюду плотное множество нормированных элементов пространства E, а $\| f \|_0$ определена согласно предложению 2, причем в качестве множества G взята линейная оболочка множества $\{x_n\}$ ($G \subset \subset E \subset E^{**}$). Из предложения 2 непосредственно следует, что $\|f\|_1$ удовлетворяет условиям леммы 3. Локально равномерная выпуклость пространства (E^*, $\| \quad \|_1$), по существу, доказана в [10].

Поступило в редакцию 15 декабря 1962 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Д э й, Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961.

[2] М. М. В а й н б е р г, О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений, Сибирский матем. журн. **2**, № 2 (1961), 201—221.

[3] E. B i s h o p, R. P h e l p s, A proof that every Banach space is subreflexive, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, № 1 (1961), 97—98.

[4] M. M. D a y, Strict convexity and smoothness, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 516—528.

[5] В. Л. Ш м у л ь я н, Sur la structure de la sphère unitaire dans l'espase de Banach, Матем. сб. **9** (**51**) (1941), 545—562.

[6] М. Г. К р е й н, М. А. К р а с н о с е л ь с к и й, Д. П. М и л ь м а н, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР **11** (1948), 97—112.

[7] М. А. К р а с н о с е л ь с к и й, Я. Б. Р у т и ц к и й, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.

[8] М. И. К а д е ц, Про зв'язок між слабою та сильною збіжністю, ДАН УРСР, № 9 (1959), 949—952.

[9] A. R. L o v a g l i a, Locally uniformly convex Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 225—238.

[10] М. И. К а д е ц, Письмо в редакцию, Изв. вузов, Матем. № 6 (1961), 186—187.