1963 г. сентябрь—октябрь *т. XVIII, вып. 5 (113)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О СИСТЕМАХ ЛОЗИНСКОГО—ХАРШИЛАДЗЕ

М. И. Кадец

Пусть

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \tag{1}$$

— полная линейно независимая система элементов банахова пространства E. Пусть далее E_n — линейная оболочка элементов $\{x_k\}_1^n$, а U_n — проектор на E_n, т. е. линейный оператор, отображающий E на E_n и такой, что $U_n x = x$ для всех $x \in E_n$. Определим последовательность чисел

$$P_n = \inf \| U_n \|,$$

где нижняя грань берется по всем проекторам на E_n. Назовем систему (1) системой Лозинского — Харшиладзе или, короче, Λ = системой, если

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty. \tag{2}$$

С. М. Лозинский и Ф. И. Харшиладзе ([1], стр, 672 — 678) показали, что система $\{\cos kt\}_0^\infty$ является Λ-системой в пространстве $C\,[0,\ \pi]$ непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,\ \pi]$. Мы покажем, что Λ-системы существуют даже в таких «хороших» пространствах, как $L_p\,(1 < p \neq 2)$. В L_2, очевидно, Λ-систем нет.

Назовем базис $\{y_k\}_1^\infty$ в E условным, если существует такая перестановка его членов, после которой он перестает быть базисом.

Лемма 1. *Пусть $\{y_k\}_1^\infty$ — условный базис, $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — сопряженная система линейных функционалов (т. е. $\varphi_i(y_i) = \delta_{ij}$). Тогда найдутся элемент $\bar{x} \in E$ и линейный функционал $\bar{f}$ такие, что числовой ряд*

$$\bar{f}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\bar{x})\, \bar{f}(y_k) \tag{3}$$

сходится условно (т. е. не абсолютно).

Доказательство. Допустим, что ряд $\sum \varphi_k(x) f(y_k)$ безусловно сходится для всех элементов x и линейных функционалов f. Это означает, что любая перестановка системы $\{y_k\}_1^\infty$ есть слабый, а значит, и сильный, базис ([4], стр. 118 — 119), что противоречит определению условного базиса.

Представим члены условного базиса $\{y_k\}_1^\infty$ так, чтобы соответственно переставленный ряд (3) сходился к числу, отличному от $\bar{f}(\bar{x})$. Полученную перестановку системы $\{y_k\}_1^\infty$ и соответствующую перестановку $\{\varphi_k\}_1^\infty$ обозначим $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{f_k\}_1^\infty$. Очевидно, разложение элемента $\bar{x}$ по системе $\{x_k\}_1^\infty$:

$$\bar{x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, x_k,$$

не сходится ни по какой последовательности частных сумм. Отсюда следует, что норма оператора

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k$$

подчинена условно

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n \| = \infty. \tag{4}$$

Лемма 2. *Система $\{\cos kt\}_{k=0}^\infty$ есть условный базис в $L_p[0, \pi]$ при $1 < p \neq 2$.*

Это предложение содержится в статье Н. Ф. Гапошкина [2]. Рассмотрим в $L_p[0, \pi]$ оператор

$$A_\tau x(t) = \frac{1}{2}\,[x(t+\tau) + x(t-\tau)]$$

(каждую функцию $x(t)$ мы считаем продолженной четно на $[-\pi, \pi]$ и периодически на всю ось). Очевидно,

$$\| A_\tau \| \leqslant \sqrt[p]{2}.$$

Переставим элементы ортонормированной системы

$$1, \quad \sqrt{2}\cos t, \quad \sqrt{2}\cos 2t, \quad \sqrt{2}\cos 3t, \ldots \tag{5}$$

так, чтобы для переставленной системы $\{x_k(t)\}_1^\infty$ в $L_p[0, \pi]$ выполнялось условие (4). Это можно сделать на основании леммы 2. Обозначим $S_n x(t)$ частные суммы разложения

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k(t).$$

Для произвольного проектора U_n на линейную оболочку E_n функций $\{x_k(t)\}_1^n$ и любой $x(t) \in L_p[0, \pi]$ справедливо тождество

$$S_n x(t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{A_\tau U_n A_\tau x(t)\}\, d\tau, \tag{6}$$

являющееся незначительной модификацией тождества Марцинкевича (см., например, [3]).

Тождество (6) позволяет оценить снизу нормы проекторов U_n с помощью нормы проектора S_n:

$$\| S_n \| \leqslant \| A_\tau \|^2 \cdot \| U_n \| \leqslant \sqrt[p]{4} \cdot \| U_n \|. \tag{7}$$

Из (4) и (7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \| U_n \| = \infty.$$

Так как U_n — произвольный проектор, то для рассматриваемой системы выполнено (2) и, значит, она является Λ-системой.

При решении проблемы базиса представляется естественным взять полную линейно-независимую систему $\{x_k\}_1^\infty$ и попытаться провести удачно подобранный процесс «ортогонализации»

$$y_k = \sum_{1}^{k} \lambda_{ki} x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

так, чтобы в результате получить базис $\{y_k\}_1^\infty$. Из доказанного выше следует, что даже в случае «хороших» пространств такая попытка, вообще говоря, не приводит к успеху.

Поступило в редакцию 12 ноября 1958 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
[2] В. Ф. Гапошкин, О безусловных базисах в пространствах L_p, УМН **13**, вып 4 (82), (1958), 179—184.
[3] Д. Л. Берман, Об одном классе линейных операций, ДАН **84** (1958), 197—200.
[4] М. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961.