1960 г. январь—февраль *т. XV, вып. 1 (91)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕК МАКСИМАЛЬНОГО УКЛОНЕНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

М. И. Кадец

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[0; \pi]$, $f_n(t)$ — четный тригонометрический полином порядка n, наименее уклоняющийся от $f(t)$ в метрике пространства C. Как известно, в этом случае на отрезке $[0; \pi]$ существуют $n+2$ точки

$$t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{n+1}^{(n)} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

в которых разность $r_n(t) = f(t) - f_n(t)$ достигает максимального по модулю значения $E_n[f]$ с чередующимися знаками (точки максимального уклонения). Будем характеризовать распределение точек (1) с помощью величины Δ_n, определенной следующим образом:

$$\Delta_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n+1} \left| t_k^{(n)} - \frac{\pi k}{n+1} \right| \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема. *Для любой непрерывной на* $[0, \pi]$ *функции и любого* $\varepsilon > 0$ *точки максимального уклонения удовлетворяют предельному равенству*

$$\varliminf_{n \to \infty} \Delta_n \cdot n^{\frac{1}{2} - \varepsilon} = 0. \tag{2}$$

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Если действительные числа* α *и* β *удовлетворяют условию* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \pi$, *то выполняется следующее неравенство*:

$$\frac{1 - \cos\alpha + 2\cos\beta}{1 + \cos\alpha} \geqslant \operatorname{ch}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Положим $\alpha^2 - \beta^2 = c^2$ и найдем минимум функции

$$F(\alpha) = \frac{1 - \cos\alpha + 2\cos\beta}{1 + \cos\alpha} \qquad (c \leqslant \alpha \leqslant \pi)$$

при фиксированном c. Вычислим $F'(\alpha)$

$$F'(\alpha) = \alpha\,\frac{1 + \cos\beta}{1 + \cos\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{\beta}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Так как функция $\frac{\operatorname{tg} t}{t}$ возрастает в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $F'(\alpha) \geqslant 0$.

Следовательно, $\min F(\alpha)=F(c)$, откуда

$$\frac{1-\cos\alpha+2\cos\beta}{1+\cos\alpha}\geqslant\frac{3-\cos c}{1+\cos c}.$$

Остается показать, что

$$\frac{3-\cos c}{1+\cos c}\geqslant \operatorname{ch} c \qquad (0\leqslant c\leqslant\pi).$$

Справедливость этого последнего неравенства легко доказывается, если привести его к виду

$$\operatorname{ch}\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}\leqslant 1.$$

Действительно, производная функции, стоящей в левой части неравенства, отрицательна при $0<c\leqslant\pi$ и, следовательно, сама функция достигает максимума, равного единице при $c=0$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t)$ — четный тригонометрический полином порядка n, имеющий в интервале $(0;\ \pi)$ n простых корней; $\varphi(0)=0$. Пусть, далее, в тех точках, где $\varphi'(t)=0$, выполняется условие*

$$1\leqslant|\varphi(t)|\leqslant L,$$

где $L\geqslant 1$ — произвольное фиксированное число. Тогда корни уравнения $|\varphi(t)|=1$, которые мы обозначим

$$0\leqslant t_0<t_1\leqslant t_2<\ldots\leqslant t_{2n-2}<t_{2n-1}\leqslant\pi,$$

удовлетворяют следующим неравенствам:

$$-\frac{\pi\theta}{n}-\frac{\operatorname{arch}L}{\sqrt{n\theta}}\leqslant t_{2k-1}-\frac{\pi k}{n}\leqslant t_{2k}-\frac{\pi k}{n}\leqslant\frac{\pi\theta}{n}+\frac{\operatorname{arch}L}{\sqrt{n\theta}} \qquad (1\leqslant k\leqslant n), \tag{4}$$

где θ — произвольное число, заключенное между нулем и половиной.

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число $k\leqslant n$ и рассмотрим тригонометрический полином порядка np от $\frac{t}{p}$

$$\Phi_k\left(\frac{t}{p}\right)=\cos(np-m)\frac{t}{p}\cdot T_m\left(\frac{1-\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}+2\cos\frac{t}{p}}{1+\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}}\right),$$

где $T_m(x)=\cos m\arccos x$, а натуральные числа m и p и действительное число $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\right)$ удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{ch}m\sqrt{\left[\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}\right]^2-\left[\frac{\pi k}{np-m}\right]^2}=L. \tag{5}$$

Представив уравнение (5) в форме

$$\frac{p}{m}=\frac{1}{n}\left[1+\frac{\pi}{\operatorname{arch}L}\sqrt{(k+\theta)^2-k^2}\right], \tag{6}$$

видим, что оно имеет счетное множество решений, соответствующее всюду плотному множеству значений θ. Из неравенства (3), если положить в нем $\alpha=\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}$, $\beta=\frac{t}{p}$, следует, что при $0\leqslant\frac{t}{p}\leqslant\frac{\pi k}{np-m}$

$$T_m\left(\frac{1-\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}+2\cos\frac{t}{p}}{1+\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}}\right)\geqslant\operatorname{ch}\sqrt{\left[\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}\right]^2-\left(\frac{t}{p}\right)^2}\geqslant L.$$

Если же $\frac{\pi(k+\theta)}{np-m} \leqslant \frac{t}{p} \leqslant \pi$, то

$$\left| T_m\left(\frac{1-\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}+2\cos\frac{t}{p}}{1+\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}}\right)\right| \leqslant 1.$$

Кроме того, на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi(k+\theta)}{np-m}\right]$ полином

$$T_m\left(\frac{1-\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}+2\cos\frac{t}{p}}{1+\cos\frac{\pi(k+\theta)}{np-m}}\right)$$

монотонно убывает. Сделанные замечания позволяют заключить, что функция $\Phi_k\left(\frac{t}{p}\right)$ имеет на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi kp}{np-m}\right]$ ровно $k+1$ максимум и минимум, превосходящие L по абсолютной величине, с чередующимися знаками; на отрезке $\left[\frac{\pi(k+\theta)}{np-m};\ \pi p\right]$ эта функция по модулю не превосходит единицу. Покажем теперь, что

$$t_{2k} \leqslant \frac{\pi(k+\theta)p}{np-m}. \tag{7}$$

Действительно, если допустить противное, то, как следует из рассмотрения графиков функций $y=\varphi(t)$ и $y=\Phi_k\left(\frac{t}{p}\right)$ на отрезке $[0;\ \pi p]$, уравнение $\varphi(t)=\Phi_k\left(\frac{t}{p}\right)$ должно иметь в полуинтервале $[0;\ t_{2k}]$ по крайней мере $k+1$ корень, а на отрезке $[t_{2k};\ np]$ не менее $np-k$ корней. Так как разность $\varphi(t)-\Phi_k\left(\frac{t}{p}\right)$ есть тригонометрический многочлен порядка np от $\frac{t}{p}$, то на отрезке $[0;\ \pi p]$ он может иметь не более np корней. Следовательно, наше допущение неверно. Подставим в (7) значение $\frac{p}{m}$ из (6) и произведем упрощения

$$t_{2k} \leqslant \frac{\pi(k+\theta)}{n}+\frac{k+\theta}{n\sqrt{(k+\theta)^2-k^2}}\operatorname{arch} L \leqslant \frac{\pi(k+\theta)}{n}+\frac{\operatorname{arch} L}{\sqrt{n\theta}}. \tag{8}$$

Если вместо $\varphi(t)$ рассмотреть $\varphi(\pi-t)$, то аналогичным же образом получим

$$\pi-t_{2k-1} \leqslant \frac{\pi(n-k+\theta)}{n}+\frac{\operatorname{arch} L}{\sqrt{n\theta}}. \tag{9}$$

Неравенства (8) и (9) дадут нам требуемое неравенство (4).

Доказательство теоремы. Пусть по-прежнему $f(t)$ — непрерывная на $[0;\ \pi]$ функция, $f_n(t)$ и $f_{n+1}(t)$ — четные тригонометрические полиномы наилучшего приближения;

$$r_n(t)=f(t)-f_n(t),\quad r_{n+1}(t)=f(t)-f_{n+1}(t).$$

Рассмотрим многочлен

$$\varphi_{n+1}(t)=f_{n+1}(t)-f_n(t)=r_n(t)-r_{n+1}(t).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$r_n(t_k^{(n)}) = (-1)^k E_n[f] \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$$

и, следовательно,

$$E_n[f] - E_{n+1}[f] \leqslant (-1)^k \varphi_{n+1}(t_k^{(n)}) \leqslant E_n[f] + E_{n+1}[f].$$

Таким образом,

$$t_{2k-1} \leqslant t_k^{(n)} \leqslant t_{2k} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1), \tag{10}$$

где t_{2k-1} и t_{2k} — корни уравнения

$$|\varphi_{n+1}(t)| = E_n[f] - E_{n+1}[f].$$

Так как многочлен $\varphi(t) = \dfrac{\varphi_{n+1}(t)}{E_n[f] - E_{n+1}[f]}$ удовлетворяет условиям леммы 2, то из неравенств (4) и (10) следует, что

$$\Delta_n \leqslant \frac{\pi\theta}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)\theta}} \operatorname{arch} \frac{E_n[f] + E_{n+1}[f]}{E_n[f] - E_{n+1}[f]}. \tag{11}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} E_n[f] = 0$, бесконечное произведение $\prod\limits_1^\infty \dfrac{E_n[f]}{E_{n+1}[f]}$ расходится и, следовательно, расходится ряд $\sum\limits_1^\infty \dfrac{E_n[f] - E_{n+1}[f]}{E_n[f] + E_{n+1}[f]}$. Поэтому из (11) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}\left[\left(\Delta_n - \dfrac{\pi\theta}{n}\right)\sqrt{(n+1)\theta}\right]} = \infty,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\Delta_n \sqrt{n})^N} = \infty \tag{12}$$

при сколь угодно большом N. Сравнивая ряд (12) со сходящимся рядом $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^{1+\delta}}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n \sqrt{n}}{n^{\frac{1+\delta}{N}}} = 0.$$

Обозначив $\dfrac{1+\delta}{N} = \varepsilon$, получим требуемое равенство (2).

Поступило в редакцию 5 декабря 1956 г.