1958 г. ноябрь—декабрь т. XIII, вып. 6 (84)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О ЛИНЕЙНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ L_p И l_q

М. И. Кадец

Вопрос о том, существует ли в L_p подпространство, изоморфное l_q, решен для всех возможных соотношений между p и q за исключением

$$1 \leqslant p < q < 2.$$

Полученные результаты можно свести в следующую таблицу:

Соотношение между p и q	Существует ли в L_p подпространство, изоморфное l_q	Автор
$p \geqslant 1;\ q=2$	да	С. Банах и С. Мазур [1]
$1 \leqslant p=q$	да	
$1 \leqslant q < p \leqslant 2$	нет	
$2 \leqslant p < q$	нет	
$1 \leqslant q < 2 < p$	нет	Paley [2]
$2 < q < p$	нет	
$1 \leqslant p < 2 < q$	нет	
$1 \leqslant p < q < 2$	?	

В настоящей заметке строится функциональное пространство $E_q(1 < q < 2)$, которое, если его рассматривать как подпространство L_p $(1 \leqslant p < q)$, изоморфно l_q. Построение основано на некоторых результатах теории распределений сумм независимых случайных величин [3].

Пусть $F(x)$ — функция распределения, обладающая характеристической функцией

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos tx\, dF(x) = e^{-|t|^q}.$$

Определенная таким образом функция непрерывна и симметрична, т. е. $F(x)+F(-x)=1$. Для любого $p<q$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p\, dF(x) < \infty. \tag{1}$$

Для сверки функций $F\left(\frac{x}{a_k}\right)$ имеет место следующая простая формула:

$$F\left(\frac{x}{a_1}\right) * F\left(\frac{x}{a_2}\right) * \ldots * F\left(\frac{x}{a_n}\right) = F\left(\frac{x}{\sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^q}}\right) \quad (a_k > 0). \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[0, 1]$ равенством $x = F(y)$, и с ее помощью сконструируем базис в E_q. С этой целью определим последовательность точек x_k системой равенств:

$$x_0 = \frac{3}{4}, \quad f(x_k) = 2f(x_{k-1}) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Этими точками отрезок $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ разбивается на части $[x_{k-1}, x_k]$. Обозначим: $x_k - x_{k-1} = \delta_k$. Первый член базиса — ступенчатую функцию $f_1(x)$ — определим так:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x_k), & \text{если} \quad x_{k-1} < x < x_k, \\ -f(x_k), & \text{если} \quad 1 - x_k < x < 1 - x_{k-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что при $\frac{1}{2} < x < 1$

$$0 < f(x) < f_1(x) < 2f(x). \tag{4}$$

Остальные члены базиса определяются по индукции: $f_n(x)$ определяется на каждом отрезке постоянства функции $f_{n-1}(x)$ с помощью равенства

$$f_n(x) = f_1\left(\frac{x - x'}{x'' - x'}\right), \tag{5}$$

где $x' < x''$ — концы этого отрезка.

Вычислим норму произвольной линейной комбинации членов базиса $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ в метрике L_p $(p < q)$:

$$\|\varphi_n\|^p = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \right|^p dx.$$

Из определений (3) и (5) следует, что мера множества, на котором функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ одновременно принимают заданные значения, равны произведению мер множеств, на которых каждая из функций принимает соответствующее значение:

$$\mu E\{f_1 x) = f(x_{k_1}); \ldots; f_n(x) = f(x_{k_n})\} = \delta_{k_1} \cdot \delta_{k_2} \cdot \ldots \cdot \delta_{k_n}. \tag{6}$$

В этом смысле можно говорить о независимости значений, принимаемых функциями $f_k(x)$. На основании (6) норма $\varphi_n(x)$ может быть записана в виде кратного интеграла:

$$\|\varphi_n\|^p = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k f_1(x_k) \right|^p dx_1 \ldots dx_n. \tag{7}$$

Поскольку $f_1(x) + f_1(1 - x) = 0$, то формулу (7) можно переписать в виде

$$\|\varphi_n\|^p = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ldots \int_{\frac{1}{2}}^1 \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k f_1(x_k) \right|^p dx_1 \ldots dx_n. \tag{8}$$

Для того чтобы перейти в (8), а затем и в (7) от $f_1(x)$ к $f(x)$, рассмотрим выражение

$$J=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=\sum_{\varepsilon_k=\pm 1}\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\alpha_k\right|^p.$$

Очевидно, это четная функция от α_k. Если $0\leqslant\alpha_k\leqslant\beta_k$, то

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\leqslant J(\beta_1, \ldots, \beta_n), \tag{9}$$

в чем легко убедиться, рассматривая частные производные $\frac{\partial J}{\partial\alpha_k}$ при $p>1$. Поскольку $J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ непрерывно зависит от p, то соотношение (9) справедливо и при $p=1$. Из (4) и (9) следует, что равенство (8) можно заменить неравенствами:

$$\frac{1}{2^p}\|\varphi_n\|^p<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cdots\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sum_{\varepsilon_k=\pm 1}\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k|a_k|f(x_k)\right|^p dx_1\ldots dx_n<\|\varphi_n\|^p,$$

которые, поскольку $f(x)+f(1-x)=0$, можно переписать в виде

$$\frac{1}{2^p}\|\varphi_n\|^p<\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}|a_k|(f x_k)\right|^p dx_1\ldots dx_n<\|\varphi_n\|^p. \tag{10}$$

Таким образом, для оценки $\|\varphi_n\|$ достаточно вычислить интеграл в (10). Из определения функции $f(x)$ следует, что

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}|a_k|f(x_k)\right|^p dx_1\ldots dx_n=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}|a_k|x_k\right|^p dF(x_1)\ldots dF(x_n).$$

Произведя в последнем выражении замену переменных

$$\sum_{k=m}^{n}|a_k|x_k=y_m \qquad (m=1, 2, \ldots, n),$$

перепишем его в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|y_1|^p dF\left(\frac{y_1-y_2}{|a_1|}\right)\ldots dF\left(\frac{y_n}{|a_n|}\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p d\left\{F\left(\frac{x}{|a_1|}\right)*\ldots*F\left(\frac{x}{|a_n|}\right)\right\}.$$

На основании формулы (2) последний интеграл приобретает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p dF\left(\frac{x}{\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q}}\right)=\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right\}^{\frac{p}{q}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p dF(x).$$

Следовательно, для $\|\varphi_n\|$ при любом натуральном n справедлива оценка

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p dF(x)\right]^{\frac{1}{p}}<\frac{\|\varphi_n\|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}<2\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p dF(x)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

Если теперь определить пространство E_q как совокупность всех рядов вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q < \infty \right),$$

то из (11) следует, что в метрике любого L_p $(p < q)$ E_q изоморфно l_q. Таким образом, мы можем дать утвердительный ответ на последний вопрос таблицы, приведенной в начале заметки.

Остается открытым вопрос об изоморфном вложении L_q в L_p при $(1 \leqslant p < q < 2)$.

Пространство $E_q \subset L_p$ обладает еще одним интересным свойством: для него не существует дополнительного подпространства. Действительно, допустим, что такое подпространство D_q существует. Тогда L_p можно представить в виде произведения

$$L_p = E_q \times D_q.$$

Переходя к сопряженным пространствам, получим [1], что

$$\overline{L}_p = \overline{E}_q \times \overline{D}_q.$$

Так как $\overline{L}_p$ и $\overline{E}_q$ изоморфны соответственно $L_{p'}$ и $l_{q'}$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \right),$$

то мы приходим к выводу о возможности изоморфного вложения l_q в L_p при $2 < q < p$, что противоречит результату Paley [2].

Поступило в редакцию 16 апреля 1957 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, Радянська школа, 1948.
[2] Paley, Some theorems on abstract spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 42, № 4 (1936).
[3] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., Гостехиздат, 1949.