1956 г. сентябрь—октябрь т. XI, вып. 5(71)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

БЕЗУСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ В РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. И. Кадец

Ряд векторов линейного нормированного пространства

$$x_1+x_2+x_3+\ldots \tag{1}$$

называется безусловно (коммутативно) сходящимся, если этот ряд остаётся сходящимся при любой перестановке его членов.

В. Орлич [1] показал, что ряд (1) сходится безусловно в том и только том случае, если сходится каждый частичный ряд

$$x_{n_1}+x_{n_2}+x_{n_3}+\ldots \qquad (n_1<n_2<n_3<\ldots). \tag{2}$$

Этому требованию можно придать другую форму: ряд (1) сходится безусловно тогда и только тогда, если ряд

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+\ldots \tag{3}$$

сходится при любых $\alpha_k=\pm 1$.

Лемма. *Пусть* $\sum\limits_1^\infty x_k$ — *безусловно сходящийся ряд. Тогда, каково бы ни было* $\varepsilon>0$, *найдётся* n_0 *такое, что*

$$\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k x_k\Big\|<\varepsilon \tag{4}$$

при любых $\alpha_k=\pm 1$ *и* $n>n_0$.

Доказательство. Допустим, что условие (4) не выполнено, т. е. существует последовательность индексов $n_1<n_2<n_3<\ldots$ такая, что

$$\Big\|\sum_{k=n_j}^{\infty}\alpha_k^{(j)}x_k\Big\|\geqslant\varepsilon \qquad (j=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

Выберем подпоследовательность $n_{j_1}<n_{j_2}<n_{j_3}<\ldots$ так, чтобы

$$\Big\|\sum_{k=n_{j_\nu}}^{n_{j_{\nu+1}}-1}\alpha_k^{(j_\nu)}x_k\Big\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2} \quad (\nu=1,\,2,\,3,\ldots), \tag{5}$$

и из этих сумм сконструируем ряд

$$\sum_{k=n_{j_1}}^{\infty}\alpha_k^* x_k,$$

где $\alpha_k^* = \alpha_k^{(j_\nu)}$ при $n_{j_\nu} \leqslant k < n_{j_{\nu+1}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Из (5) следует расходимость сконструированного ряда, что противоречит безусловной сходимости ряда (1).

Каждой сумме $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$, порождённой безусловно сходящимся рядом (1), можно поставить в соответствие точку канторовского совершенного множества $t \in P_0$

$$t = \frac{\beta_1}{3} + \frac{\beta_2}{9} + \frac{\beta_3}{27} + \ldots,$$

положив $\beta_k = \alpha_k + 1$. В силу соотношения (4) функция

$$\| S(t) \| = \| \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \|,$$

определённая на множестве P_0, непрерывна и, следовательно, достигает максимума в некоторой точке t_0. Не ограничивая общности, можно считать $t_0 = 1$. Итак,

$$\| S \| = \| S(1) \| = \| x_1 + x_2 + \ldots \| \geqslant \| S(t) \| \qquad (t \in P_0);$$

в частности,

$$\| S \| \geqslant \| S - 2x_k \|. \tag{6}$$

Будем считать $\| S \| \leqslant 2$. В силу доказанной леммы этого всегда можно добиться, отбросив несколько первых членов ряда.

Для доказательства основного результата этой заметки введём понятие модуля выпуклости равномерно выпуклого пространства. Известно [2], что в равномерно выпуклом пространстве верхняя грань диаметров множеств, отсекаемых от единичной сферы плоскостями, отстоящими от центра на расстоянии $1 - \delta$, стремится к нулю вместе с δ. Обозначим эту верхнюю грань через $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$. Обратную функцию

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

назовём *модулем выпуклости пространства*.

Теорема. *Если* (1) *есть безусловно сходящийся ряд в равномерно выпуклом пространстве с модулем выпуклости* $\delta = \delta(\varepsilon)$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(\| x_k \|) < \infty.$$

Доказательство. Пусть F — нормированный линейный функционал, для которого $F(S) = \| S \|$. Плоскость, определённая уравнением

$$F(x) = F\left(\frac{S - 2x_k}{\| S \|} \right), \tag{7}$$

отстоит от центра единичной сферы на расстоянии

$$F\left(\frac{S - 2x_k}{\| S \|} \right) = 1 - \delta.$$

Определим δ:

$$\delta = 1 - F\left(\frac{S - 2x_k}{\| S \|} \right) = F\left(\frac{S}{\| S \|} \right) - F\left(\frac{S - 2x_k}{\| S \|} \right) = F\left(\frac{2x_k}{\| S \|} \right). \tag{8}$$

Так как векторы

$$\frac{S}{\|S\|} \quad \text{и} \quad \frac{S-2x_k}{\|S\|}$$

принадлежат множеству, отсекаемому плоскостью (7) от единичной сферы, то

$$\left\| \frac{S}{\|S\|} - \frac{S-2x_k}{\|S\|} \right\| \leqslant \varepsilon(\delta). \tag{9}$$

Сопоставляя (8) и (9), имеем:

$$\delta\left(\frac{2\|x_k\|}{\|S\|}\right) \leqslant F\left(\frac{2x_k}{\|S\|}\right).$$

Просуммировав последнее неравенство по k, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\frac{2\|x_k\|}{\|S\|}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{2x_k}{\|S\|}\right) = F\left(\frac{2S}{\|S\|}\right) = 2.$$

Так как $\|S\| \leqslant 2$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(\|x_k\|) \leqslant 2,$$

что и доказывает теорему.

В. Орлич в [1] получил следующий необходимый критерий безусловной сходимости в пространстве L_p $(p \geqslant 1)$: если ряд (1) в L_p сходится безусловно, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty \quad \text{при} \quad p \geqslant 2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < 2.$$

Покажем, что пространство L_p при $p > 1$ равномерно выпукло с модулем выпуклости, удовлетворяющим следующим неравенствам:

$$\delta(\varepsilon) > K(p)\,\varepsilon^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \tag{10a}$$

$$\delta(\varepsilon) > K(p)\,\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{10b}$$

где $K(p)$ не зависит от ε. Тогда указанная теорема Орлича для $p \neq 1$ является следствием теоремы настоящей заметки.

Предварительно докажем два неравенства:

$$|a+b|^p \geqslant |a|^p + p\,|a|^{p-1}\, b \operatorname{sign} a + C(p)\,|b|^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \tag{11a}$$

и

$$|a+b|^p \geqslant |a|^p + p\,|a|^{p-1}\, b \operatorname{sign} a + C(p)\,\frac{|b|^2}{|a|^{2-p} + |b|^{2-p}} \quad \text{при} \quad 1 < p < 2, \tag{11b}$$

где a и b — произвольные действительные числа, а $C(p) > 0$ — постоянная, не зависящая от a и b. Так как при $a = 0$ оба неравенства, очевидно, выполняются, то в доказательстве нуждается лишь случай $a \neq 0$.

Возьмём сначала $1 < p < 2$ и рассмотрим непрерывную функцию

$$f(\beta) = (|1+\beta|^p - 1 - p\beta)\cdot\left(\frac{1}{|\beta|^p} + \frac{1}{\beta^2}\right) \qquad (-\infty < \beta < \infty).$$

Эта функция не обращается в нуль ни в одной точке числовой прямой и, кроме того,

$$\lim_{\beta\to\pm\infty} f(\beta)=1.$$

Следовательно, существует постоянная $C(p)$ такая, что

$$(|1+\beta|^p-1-p\beta)\left(\frac{1}{|\beta|^p}+\frac{1}{\beta^2}\right)\geqslant C(p)>0,$$

откуда

$$|1+\beta|^p\geqslant 1+p\beta+C(p)\cdot\frac{\beta^2}{1+|\beta|^{2-p}}.$$

Подставив $\beta=\frac{b}{a}$, получим требуемое неравенство (11b). В случае $p\geqslant 2$ поступаем аналогично, рассматривая функцию

$$f(\beta)=\frac{|1+\beta|^p-1-p\beta}{|\beta|^p}\qquad(-\infty<\beta<\infty).$$

Подставим теперь в неравенства (11a) и (11b) $a=f(x)$; $b=\varphi(x)$ $(f(x)\in L_p;$ $\varphi(x)\in L_p)$ и проинтегрируем их. В результате получим:

$$\|f+\varphi\|^p\geqslant\|f\|^p+p\int_0^1|f|^{p-1}\varphi\operatorname{sign} f\,dx+C(p)\cdot\|\varphi\|^p\quad(p\geqslant 2)\tag{12a}$$

и

$$\|f+\varphi\|^p\geqslant\|f\|^p+p\int_0^1|f|^{p-1}\varphi\operatorname{sign} f\,dx+C(p)\int_0^1\frac{|\varphi|^2\,dx}{|f|^{2-p}+|\varphi|^{2-p}}\,(1<p<2).\tag{12b}$$

Займёмся последним слагаемым в неравенстве (12b). Для этого к выражению

$$\|\varphi\|^p=\int_0^1\frac{|\varphi|^p}{(|f|^{2-p}+|\varphi|)^{2-p})^{\frac{p}{2}}}(|f|^{2-p}+|\varphi|^{2-p})^{\frac{p}{2}}dx$$

применим неравенство Гёльдера:

$$\|\varphi\|^p\leqslant\left\{\int_0^1\frac{|\varphi|^2\,dx}{|f|^{2-p}+|\varphi|^{2-p}}\right\}^{\frac{p}{2}}\cdot\left\{\int_0^1(|f|^{2-p}+|\varphi|^{2-p})^{\frac{p}{2-p}}dx\right\}^{\frac{2-p}{2}}.\tag{13}$$

Так как $1<p<2$, то $\frac{p}{2-p}>1$, и последний сомножитель можно рассматривать как норму функции

$$\Phi(x)=|f(x)|^{2-p}+|\varphi(x)|^{2-p}$$

в пространстве $L_{\frac{p}{2-p}}$. Применим к $\|\Phi(x)\|_{\frac{p}{2-p}}$ неравенство треугольника

$$\|\Phi\|_{\frac{p}{2-p}}\leqslant\|f^{2-p}\|_{\frac{p}{2-p}}+\|\varphi^{2-p}\|_{\frac{p}{2-p}}=\|f\|^{2-p}+\|\varphi\|^{2-p}.\tag{14}$$

Подставим (14) в (13):

$$\|\varphi\|^p\leqslant\left\{\int_0^1\frac{|\varphi|^2\,dx}{|f|^{2-p}+|\varphi|^{2-p}}\right\}^{\frac{p}{2}}\cdot\{\|f\|^{2-p}+\|\varphi\|^{2-p}\}^{\frac{p}{2}},$$

откуда

$$\int_0^1 \frac{|\varphi|^2\,dx}{|f|^{2-p}+|\varphi|^{2-p}} \geqslant \frac{\|\varphi\|^2}{\|f\|^{2-p}+\|\varphi\|^{2-p}}\,. \tag{15}$$

Пусть теперь $f(x)$ — некоторый элемент пространства Lp. Нормированный линейный функционал F_f, для которого

$$F_f(f) = \|f\|,$$

имеет вид

$$F_f(\varphi) = \frac{\int_0^1 |f|^{p-1}\varphi\,\mathrm{sign}\,f\,dx}{\|f\|^{p-1}}\,. \tag{16}$$

Подставив (15) и (16) в неравенства (12a) и (12b), получим окончательно:

$$\|f+\varphi\|^p \geqslant \|f\|^p + p\|f\|^{p-1}F_f(\varphi) + C(p)\|\varphi\|^p \qquad (p \geqslant 2) \tag{17a}$$

и

$$\|f+\varphi\|^p \geqslant \|f\|^p + p\|f\|^{p-1}F_f(\varphi) + C(p)\frac{\|\varphi\|^2}{\|f\|^{2-p}+\|\varphi\|^{2-p}} \qquad (1 < p < 2). \tag{17b}$$

С помощью неравенств (17a) и (17b) оценим модуль выпуклости пространства $L_p\,(p > 1)$. Уравнение плоскости R_δ, отстоящей от нуля пространства на расстоянии $1-\delta$, имеет вид

$$\int_0^1 r(x)\,\psi(x)\,dx = 1-\delta,$$

где $r(x)$ пробегают всю плоскость R_δ, а $\psi(x)$ — определённый нормированный элемент сопряжённого пространства $L_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Положим

$$\psi(x) = |f(x)|^{p-1}\,\mathrm{sign}\,f(x).$$

Очевидно, $f(x) \in L_p$ и $\|f\| = 1$. Уравнение плоскости R_δ можно переписать в виде

$$F_f(r) = \int_0^1 |f(x)|^{p-1}\,r(x)\,\mathrm{sign}\,f(x)\,dx = 1-\delta.$$

Множество G, отсекаемое плоскостью R_δ от единичной сферы, определится системой неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} \|g\| \leqslant 1 \\ F_f(g) \geqslant 1-\delta \end{array}\right. \qquad (g \in G).$$

В частности, этому множеству принадлежит $f(x)$. Представив элемент g в виде

$$g = f + \varphi,$$

воспользуемся неравенствами (17a) и (17b). Так как $\|f+\varphi\| = \|g\| \leqslant 1$, а $F_f(\varphi) = F_f(g) - F_f(f) \geqslant -\delta$, то

$$1 \geqslant 1 - p\delta + C(p)\|\varphi\|^p \qquad (p \geqslant 2),$$

$$1 \geqslant 1 - p\delta + C(p)\frac{\|\varphi\|^2}{1+\|\varphi\|^{2-p}} \qquad (1 < p < 2),$$

откуда

$$\|\varphi\|^p \leqslant \frac{p}{C(p)}\delta \qquad (p \geqslant 2),$$

$$\|\varphi\|^2 \leqslant \frac{2p}{C(p)}\delta \qquad (1 < p < 2).$$

Так как

$$\|g_1 - g_2\| \leqslant \|g_1 - f\| + \|g_2 - f\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|,$$

то

$$\varepsilon(\delta) \leqslant 2\sqrt[p]{\frac{p}{C(p)}\delta} \qquad (p \geqslant 2),$$

$$\varepsilon(\delta) \leqslant 2\sqrt{\frac{2p}{C(p)}\delta} \qquad (1 < p < 2),$$

откуда и следуют неравенства (10a) и (10b).

Равномерная выпуклость пространств L_p была доказана Кларксоном [3], но из его доказательства в случае $1 < p < 2$ получается более слабая оценка для модуля выпуклости:

$$\delta(\varepsilon) > K(p)\,\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}.$$

Поступило в редакцию 24 декабря 1954 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Orlicz, Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen, Studia Math. 4 (1933).

[2] М. И. Кадец, О топологической эквивалентности равномерно выпуклых пространств, УМН X, вып. 4 (1955).

[3] J. A. Clarcson, Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936)