1955 г. т. X, вып. 4 (66)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. И. Кадец

Как указывает С. Банах [1], «неизвестно ни одного примера двух сепарабельных пространств типа (B) с бесконечным числом измерений, которые не были бы гомеоморфны; с другой стороны, неизвестно, как доказать, что, например, пространство C гомеоморфно с c. Одновременно не удаётся доказать гомеоморфизм между пространствами C и l. Но пространства L_p и l_q гомеоморфны для любых $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ [2]».

В заметке [3] нам удалось показать, что пространства c и l топологически эквивалентны, и следовательно, две последние задачи из приведённого выше замечания Банаха по существу совпадают.

В настоящей статье соответственно видоизменённый метод заметки [3] применён для доказательства топологической эквивалентности сепарабельных равномерно выпуклых пространств. По определению пространство Банаха называется равномерно выпуклым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geqslant 1 - \delta$, то

$$\|x - y\| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма 1. *В равномерно выпуклом пространстве всякая плоскость, отстоящая от центра единичной сферы на расстоянии $1 - \delta$, отсекает от этой сферы множество диаметра, не превосходящего ε (ε и δ — из определения равномерно выпуклого пространства).*

Проведём произвольную плоскость, отстоящую от нуля пространства на расстоянии $1 - \delta$. Возьмём пару нормированных элементов x и y, принадлежащих этой плоскости. Так как элемент $\frac{x+y}{2}$ также принадлежит плоскости, то $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geqslant 1 - \delta$ и по определению равномерно выпуклого пространства $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. Так как x и y были выбраны произвольно, то лемма 1 доказана.

Так как каждое равномерно выпуклое пространство регулярно [4], то для всякого линейного функционала F существует такой элемент x, что $F(x) = \|F\| \cdot \|x\|$.

Лемма 2. *Соответствие, сопоставляющее каждому нормированному функционалу F нормированный элемент x, для которого $F(x)=1$, непрерывно.*

Пусть F и Φ — пара нормированных функционалов, а x и y — нормированные элементы такие, что $F(x)=\Phi(y)=1$, и пусть $\|F-\Phi\|<\delta$, тогда $|F(x)-\Phi(x)|<\delta$. Так как $\Phi(x)<F(x)=1$, то $\Phi(x)>1-\delta$ и, следовательно, $\|x-y\|\leqslant\varepsilon$, так как x и y оказались принадлежащими части единичной сферы, отсечённой плоскостью, отстоящей от начала более чем на $1-\delta$.

Назовём элемент x ортогональным к линейному подпространству P, если $\|x+y\|\geqslant\|x\|$ для каждого $y\in P$.

Лемма 3. *Множество $\mathfrak{M}$ нормированных элементов равномерно выпуклого пространства, ортогональных к подпространству P с конечным дефектом, компактно.*

Если элемент x ортогонален к какой-либо плоскости, содержащей P, то он ортогонален и к P. Обратно, на основании теоремы Гана — Банаха о продолжении линейного функционала можно утверждать, что всякий элемент, ортогональный к P, ортогонален к какой-то плоскости, содержащей P. Следовательно, каждому нормированному функционалу F, аннулирующему P, можно поставить в соответствие нормированный элемент x, ортогональный к P и такой, что $F(x)=1$, и при этом исчерпать всё множество $\mathfrak{M}$. Это соответствие на основании леммы 2 непрерывно. Множество функционалов, аннулирующих P, есть конечномерное подпространство сопряжённого пространства $\bar{E}$; соответствующее множество нормированных элементов есть сфера в конечномерном пространстве. Итак, $\mathfrak{M}$ есть непрерывный образ компактного множества и, следовательно, компактно.

Рассмотрим систему подпространств

$$P_0\supset P_1\supset P_2\supset\ldots \tag{1}$$

таких, что $\operatorname{def} P_n=n$, а пересечение всех P_n содержит только нуль пространства; такая система существует в любом сепарабельном банаховом пространстве. Для каждого элемента введём систему уклонений

$$H_n[x]=\min_{y\in P_n}\|x-y\|=\|x-x_n\| \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

Существование и единственность элемента наилучшего приближения x_n обеспечиваются равномерной выпуклостью пространства. Для любого n

$$H_n[x]\leqslant H_{n+1}[x]\leqslant\|x\|. \tag{3}$$

Воспользуемся тем, что каждое P_n разбивает P_{n-1} на три части:

$$P_{n-1}=P_{n-1}^{+}+P_n+P_{n-1}^{-}, \tag{4}$$

и припишем каждому отличному от нуля $H_n[x]$ знак:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sign}H_n[x]=+1, && \text{если } x_{n-1}\in P_{n-1}^{+};\\
&\operatorname{sign}H_n[x]=\operatorname{sign}H_{n-1}[x], && \text{если } x_{n-1}\in P_n;\\
&\operatorname{sign}H_n[x]=-1, && \text{если } x_{n-1}\in P_{n-1}^{-}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Пусть P — произвольное линейное подпространство. Если к каждому его элементу прибавить элемент x, то получим множество $Q = P + x$, которое будем называть подпространством, полученным из P параллельным переносом вдоль x.

Лемма 4. *Пусть*

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n \tag{6}$$

— последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ |h_j| \leqslant |h_{j+1}|, \\ &2)\ \text{если}\ |h_j| = |h_{j+1}|,\ \text{то}\ h_j = h_{j+1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Множество элементов x таких, что

$$H_k[x] = h_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

есть подпространство Q_n, полученное из P_n параллельным переносом.

При $n = 1$ элементы, удовлетворяющие (8), образуют плоскость Q_1, параллельную P_1. Допустим, что лемма доказана для последовательности

$$h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, \tag{6a}$$

и соответствующее подпространство обозначим Q_{n-1}.

Множество элементов, удовлетворяющих (8), принадлежит, очевидно, Q_{n-1}.

Пусть x^* — элемент из Q_{n-1}, обладающий минимальной нормой $\|x^*\| = |h_{n-1}|$, а y — произвольный элемент из P_{n-1}^+. Тогда для каждого элемента x_λ подпространства

$$Q_{n,\lambda} = P_n + x^* + \lambda y \tag{9}$$

уклонения $H_k[x_\lambda] = h_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, так как $Q_{n,\lambda} \subset Q_{n-1}$, а

$$H_n[x_\lambda] = \psi(\lambda),$$

где $\psi(\lambda)$ — строго выпуклая функция, достигающая минимума $\psi(0) = |h_{n-1}|$. Уравнение

$$\psi(\lambda) = |h_n|$$

при $|h_n| > |h_{n-1}|$ имеет одно положительное и одно отрицательное решение, дающие соответственно подпространства Q_{n,λ_1} и Q_{n,λ_2}, для элементов которых

$$H_n[x_{\lambda_1}] = +|h_n|, \qquad H_n[x_{\lambda_2}] = -|h_n|.$$

Теорема 1. *Какова бы ни была ограниченная последовательность действительных чисел*

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, \tag{10}$$

удовлетворяющая условиям (7), *существует единственный элемент x, для которого*

$$H_n[x] = h_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

При этом $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} |h_n|$.

Множество элементов, удовлетворяющих (11), есть пересечение $\prod_1^\infty Q_n$ множеств, удовлетворяющих (8). Достаточно, следовательно, показать, что это пересечение содержит в точности одну точку. Допустим, что $\prod_1^\infty Q_n$ содержит элемент x; тогда каждое Q_n получается из соответствующего P_n параллельным переносом вдоль x и вся совокупность $\{Q_n\}_1^\infty$ оказывается конгруэнтной $\{P_n\}_1^\infty$. Так как $\prod_1^\infty P_n$ содержит единственный элемент, то это же справедливо и для $\prod_1^\infty Q_n$. Остаётся показать, что $\prod_1^\infty Q_n$ не пусто. Рассмотрим пересечения подпространств Q_n и сферы S с радиусом $h = \lim_{n\to\infty} |h_n|$. Так как $h \geqslant |h_n|$, то эти пересечения не пусты (в случае $h = |h_n|$ непустота $Q_n \cap S$ есть следствие регулярности равномерно выпуклого пространства). На основании леммы 1 можно утверждать, что диаметры $Q_n \cap S$ стремятся к нулю с возрастанием n. Итак, $\{Q_n \cap S\}_1^\infty$ есть убывающая последовательность замкнутых множеств с диаметрами, стремящимися к нулю, поэтому пересечение всех этих множеств содержит единственный элемент x, удовлетворяющий, очевидно, (11). Таким образом, существование и единственность элемента x доказаны.

Лемма 5. *Чтобы ограниченное множество $\mathfrak{M}$ равномерно выпуклого пространства было компактно, необходимо и достаточно, чтобы последовательность*

$$g_n = \sup_{x\in\mathfrak{M}} \{\|x\| - H_n[x]\} \tag{12}$$

сходилась к нулю.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\|x\| = 1$.

Для доказательства необходимости допустим, что условие леммы не выполнено, и следовательно, существует последовательность $x_k \in \mathfrak{M}$ такая, что

$$H_k[x_k] < 1 - \eta \qquad (0 < \eta < 1).$$

Выберем k_1 так, чтобы $H_{k_1}[x_0] > 1 - \frac{\eta}{2}$; затем найдём $k_2 > k_1$ такое, что $H_{k_2}[x_{k_1}] > 1 - \frac{\eta}{2}$; далее таким же образом определим $k_3, k_4, \ldots$ Тогда при произвольных $m < n$

$$\|x_{k_m} - x_{k_n}\| \geqslant H_{k_n}[x_{k_m} - x_{k_n}] \geqslant$$
$$\geqslant H_{k_n}[x_{k_m}] - H_{k_n}[x_{k_n}] > \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) - (1-\eta) = \frac{\eta}{2},$$

откуда следует, что исходное множество не компактно.

Чтобы доказать достаточность, зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ на основании леммы 1. Возьмём n настолько большим, что для всех $x \in \mathfrak{M}$

$$1 - H_n[x] < \delta.$$

Пусть теперь x — произвольный элемент из $\mathfrak{M}$. Если x_n — элемент наилучшего приближения для x, то остаток $r_n = x - x_n$ ортогонален к P_n и норма его $\|r_n\| = H_n[x]$. Подпространство $Q_n = P_n + r_n$ отстоит от начала на $H_n[x] > 1 - \delta$ и, следовательно, в пересечении с единичной сферой даёт множество диаметра, меньшего, чем ε. Так как x и r_n принадлежат этому множеству, то $\|x - r_n\| < \varepsilon$. Так как множество r_n компактно, то $\mathfrak{M}$ для любого $\varepsilon > 0$ обладает компактной ε-сетью и, следовательно, компактно.

Теорема 2. *Сепарабельные равномерно выпуклые пространства топологически эквивалентны.*

Пусть X и Y — два сепарабельных равномерно выпуклых пространства. Выделим в каждом из них систему подпространств (1) и каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие элемент $y \in Y$, обладающий той же системой уклонений, что и x. Из теоремы 1 следует, что это соответствие взаимно однозначно. Покажем, что оно непрерывно. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — сходящаяся последовательность элементов пространства X; $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Эта последовательность компактна и, следовательно, удовлетворяет условиям леммы 6. Так как условия леммы 6 касаются только уклонений, то им удовлетворяет также и соответствующая последовательность $y_1, y_2, \ldots$ $(y_n \in Y)$. Поэтому множество $y_1, y_2, \ldots$ компактно. Так как

$$\lim_{n\to\infty} H_k[y_n] = \lim_{n\to\infty} H_k[x_n] = H_k[x] \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

то множество $y_1, y_2, \ldots$ имеет единственную предельную точку, т. е. сходится. Таким образом, соответствие между X и Y непрерывно, а так как X и Y участвуют в теореме симметрично, то взаимно непрерывно, что и доказывает теорему.

Поступило в редакцию 14 августа 1954 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, Радянська школа, 1948.
[2] S. Mazur, Une remarque sur l'homeomorphie des champs fonctionels, Studia Mathematica, I (1929), 83—85.
[3] М. И. Кадец, О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха, ДАН 92, № 3 (1953).
[4] Д. П. Мильман, О некоторых признаках регулярности пространства типа (B), ДАН 20, (1938), 243—246.