1953 г. январь-февраль т. VIII, вып. 1 (53)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ВЕКТОРНЫХ ЛОМАНЫХ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. И. Кадец

Для условно сходящихся рядов векторов в n-мерном евклидовом пространстве справедливо следующее обобщение теоремы Римана о числовых рядах [1]):

Теорема (А). *Область сумм условно сходящегося ряда векторов есть подпространство.* (Подпространством называем множество вида $r+P$, где r — произвольный вектор, а P — линейное подпространство.)

Мы хотим показать, что это предложение следует из приводимой ниже теоремы.

Теорема I. *Дано конечное множество векторов r_j в n-мерном евклидовом пространстве, причём*

$$\sum_1^N r_j=0, \quad r_j^2 \leqslant 1. \tag{1}$$

Возможно так упорядочить это множество, что

$$\left(\sum_1^\nu r_j\right)^2 \leqslant K_n^2 \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots, N), \tag{2}$$

где K_n — постоянная, зависящая лишь от числа измерений пространства.

Иначе говоря, можно так переставить стороны замкнутой векторной ломаной, длины сторон которой не превосходят 1, что диаметр полученной ломаной не превзойдёт $2K_n$.

Доказательство. Докажем теорему для пространства действительных чисел ($n=1$).

Упорядочим произвольно положительные числа нашего множества и то же сделаем с отрицательными. Выпишем столько положительных чисел, чтобы их сумма не превзошла $+1$; затем выпишем столько отрицательных, чтобы сумма всех выписанных чисел оказалась отрицательной, но не менее -1; затем опять вернёмся к положительным числам и т. д. пока не исчерпаем все множество.

Таким образом, теорема для $n=1$ доказана и $K_1=1$. Допустим, что теорема доказана для пространств, имеющих менее n измерений, и докажем теорему методом индукции.

---

[1]) Д. О. Шклярский, Условно сходящиеся ряды векторов, УМН, вып, X (1944), 51—59.

Итак, дано конечное множество векторов r_j

$$\sum_1^N r_j = 0; \qquad r_j^2 \leqslant 1. \tag{1}$$

Выберем подмножество векторов, сумма которых имеет максимальную длину. Пусть это будут векторы

$$r_1, r_2, \ldots, r_M.$$

Обозначим

$$\sum_1^M r_j = r. \tag{3}$$

Из определения вектора r следует, что

$$r^2 \geqslant (r - r_j)^2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, M),$$

откуда

$$2rr_j \geqslant r_j^2 > 0, \tag{4}$$

т. е. проекции всех r_j $(j = 1, 2, \ldots, M)$ на r имеют одно направление. Для остальных r_j $(j = M+1, \ldots, N)$ имеем аналогично

$$2rr_j \leqslant -r_j^2 < 0. \tag{5}$$

Обозначим проекции векторов r_j на плоскость, ортогональную вектору r, через q_j. Очевидно, что

$$\sum_1^M q_j = 0; \quad \sum_{M+1}^N q_j = 0, \qquad q_j^2 \leqslant 1. \tag{6}$$

Согласно допущению можем упорядочить оба полученных множества так, чтобы выполнялось

$$\left(\sum_1^p q_j\right)^2 \leqslant K_{n-1}^2; \quad \left(\sum_{M+1}^s q_j\right)^2 \leqslant K_{n-1}^2 \qquad (1 \leqslant p \leqslant M < s \leqslant N) \tag{7}$$

(для упрощения записи считаем, что (6) и есть такое упорядочение).

Если теперь векторы множеств $\{q_j\}_1^M$ и $\{q_j\}_{M+1}^N$ разместить в общую последовательность любым образом, не нарушая порядка в каждом из множеств, то длина любой усечённой суммы членов этой последовательности будет, очевидно, не более $2K_{n-1}$.

Имея это в виду, обратимся к проекциям векторов r_j на r. Это будут векторы $r_j - q_j = \lambda_j r$, причём (согласно (4) и (5))

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \lambda_j \leqslant \frac{1}{\|r\|} && (j = 1, 2, \ldots, M), \\ &-\frac{1}{\|r\|} \leqslant \lambda_j \leqslant 0 && (j = M+1, \ldots, N). \end{aligned} \tag{8}$$

Множества положительных и отрицательных λ_j упорядочены в связи с упорядоченностью соответствующих множеств q_j.

Расположим оба множества λ_j в общую последовательность (не нарушая порядка в каждом из них) так, чтобы любая усечённая сумма этой последовательности по модулю не превзошла $\frac{1}{\|r\|}$. Это и будет окончательное упорядочение множества векторов (так как существует взаимно однозначное соответствие

$$r_j \longleftrightarrow q_j \longleftrightarrow \lambda_j,$$

то, упорядочивая одно из этих множеств, мы упорядочиваем и два других).

Определим константу K_n:

$$\left(\sum_1^{\nu} r_j\right)^2 = \left(\sum_1^{\nu} q_j\right)^2 + \left(\sum_1^{\nu} \lambda_j r\right)^2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

(полученное упорядочение мы снова записали как $r_1, r_2, \ldots, r_N$).

Из (7) и (8) имеем

$$K_n^2 \leqslant 4K_{n-1}^2 + 1. \tag{9}$$

Можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = \infty$.

Применение теоремы I к рядам векторов основано на следующей лемме:

Лемма I. *Если какой-то вектор пространства является предельным для последовательности усечённых сумм ряда векторов (со стремящимся к нулю общим членом), то соответствующей перестановкой членов можно сделать ряд сходящимся к этому вектору (т. е. этот вектор принадлежит области сумм).*

Доказательство. Пусть

$$S_{n_k} = r_1 + r_2 + \ldots + r_{n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

— сходящаяся к вектору r подпоследовательность усечённых сумм ряда

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots \qquad (\lim_{j\to\infty} r_j = 0).$$

В каждой из векторных ломаных

$$r_{n_k+1} + r_{n_k+2} + \ldots + r_{n_{k+1}}$$

переставим векторы так, чтобы диаметры полученных ломаных были минимальными.

Полученные ломаные запишем как

$$r'_{n_k+1} + r'_{n_k+2} + \ldots + r'_{n_{k+1}}.$$

В силу теоремы I и условия ($\lim\limits_{j\to\infty} \| r_j \| = 0$), ряд

$$r'_1 + r'_2 + r'_3 + \ldots$$

сходится к r.

Лемма II. *Область сумм ряда векторов есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть

$$S^{(0)},\ S^{(1)},\ S^{(2)},\ \ldots$$

— последовательность векторов, принадлежащих области сумм, причём

$$\lim_{j\to\infty} S^{(j)} = S.$$

Пусть

$$r_1^{(k)} + r_2^{(k)} + r_3^{(k)} + \ldots \qquad (k=0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

—ряд, полученный перестановкой членов из основного ряда и сходящийся к $S^{(k)}$.

Выпишем из ряда $\{r_j^{(1)}\}$ столько первых членов, чтобы среди них содержался вектор $r_1^{(0)}$, и чтобы их сумма уклонялась от $S^{(1)}$ менее, чем на 1; обозначим полученное множество через $\sum_1$. Выпишем затем из ряда $\{r_j^{(2)}\}$ столько первых членов, чтобы среди них содержался вектор $r_2^{(0)}$, множество $\sum_1$, и чтобы их сумма уклонялась от $S^{(2)}$ менее чем на $\frac{1}{2}$. Удалив из полученной совокупности множество $\sum_1$, получим множество $\sum_2$. Затем выпишем из ряда $\{r_j^{(3)}\}$ столько первых членов, чтобы среди них оказался вектор $r_3^{(0)}$, множество $\sum_1 + \sum_2$, и чтобы их сумма уклонялась от $S^{(3)}$ менее чем на $\frac{1}{3}$. Удалив из полученной совокупности множество $\sum_1 + \sum_2$, получим множество $\sum_3$.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность попарно не пересекающихся множеств

$$\textstyle\sum_1,\ \sum_2,\ \sum_3,\ \ldots,$$

причём их сумма содержит все члены ряда. Выпишем подряд члены множества $\sum_1$, затем члены множества $\sum_2$ и т. д. Получим ряд, для которого S является предельным вектором множества его усечённых сумм.

Действительно, сумма членов, принадлежащих множеству $\sum_1 + \sum_2 + \ldots + \sum_n$, уклоняется от $S^{(n)}$ менее чем на $\frac{1}{n}$, а $\lim S^{(n)} = S$.

Из леммы I следует, что S принадлежит области сумм, а это и доказывает лемму II.

Лемма III. *Если векторы $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ принадлежат области сумм ряда векторов, то и вся прямая*

$$S^{(\lambda)} = \lambda S^{(1)} + (1-\lambda) S^{(0)}$$

принадлежит области сумм.

Доказательство. Задавшись произвольным целым k, построим с помощью процесса, аналогичного процессу леммы II, ряд, для которого векторы

$$S^{(k)} = S^{(0)} + k\,(S^{(1)} - S^{(0)})$$

и

$$S^{(-k)} = S^{(0)} - k\,(S^{(1)} - S^{(0)})$$

являются предельными векторами множества его усечённых сумм. Пусть

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

— последовательность натуральных чисел и

$$\lim_{m\to\infty} S_{n_{2m}} = S^{(k)}; \quad \lim_{m\to\infty} S_{n_{2m+1}} = S^{(-k)}.$$

Построим новый ряд, переставив векторы каждой из ломаных

$$r_{n_\nu+1} + r_{n_\nu+2} + \ldots + r_{n_{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

таким образом, чтобы диаметры проекций этих ломаных на плоскость, ортогональную вектору $S^{(1)} - S^{(0)}$, были минимальными. В силу теоремы I для полученного ряда каждый вектор отрезка $\overline{S_j^{-(k)} S^{(k)}}$ является предельным вектором множества его усечённых сумм и, следовательно (по лемме I), принадлежит области сумм. Так как k произвольно, лемма III доказана.

Из лемм II и III следует, что область сумм условно сходящегося ряда есть подпространство.

Этот же метод позволяет доказать следующее уточнение теоремы (A).

Теорема (A′). *Областью сумм условно сходящегося ряда является подпространство всех векторов, ортогональных к подпространству направлений сходимости (направление в пространстве называем направлением сходимости, если ряд проекций членов ряда на это направление сходится абсолютно).*

Поступило в редакцию 15 сентября 1952 г.