УДК 513.881

О зависимости некоторых свойств пространств Минковского от асимметрий

В. И. Гурарий, М. И. Кадец и В. И. Мацаев (Харьков)

В этой заметке мы пользуемся терминологией и обозначениями работы [1]. Введем некоторые определения.

Определение 1. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в n-мерном пространстве Минковского B. Назовем координатной асимметрией базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ и обозначим через $\varkappa(\{e_i\}_{i=1}^n)$ величину

$$\varkappa(\{e_i\}_{i=1}^n) = \sup_{\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \varepsilon_i = \pm 1} \frac{\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i e_i \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|}.$$

Назовем диагональной асимметрией базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ и обозначим через $\delta(\{e_i\}_{i=1}^n)$ величину

$$\delta(\{e_i\}_{i=1}^n) = \sup_{\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{e_i'\}_{i=1}^n} \frac{\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i' \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|},$$

где $\{e_i'\}_{i=1}^n$ пробегает всевозможные перестановки элементов базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Величину $\alpha(\{e_i\}_{i=1}^n) = \varkappa(\{e_i\}_{i=1}^n)\,\delta(\{e_i\}_{i=1}^n)$ будем называть асиммметрией базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{B}$ —множество всех базисов в пространстве B. Координатной асимметрией (соответственно диагональной асимметрией, асимметрией) пространства B будем называть величину $\varkappa(B) = \inf_{\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{B}} \varkappa(\{e_i\}_{i=1}^n)$ (соответственно величину $\delta(B) = \inf_{\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{B}} \delta(\{e_i\}_{i=1}^n)$ или величину $\alpha(B) = \inf_{\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{B}} \alpha(\{e_i\}_{i=1}^n)$).

Пространство B будем называть координатно-симметричным (соответственно диагонально-симметричным, симметричным), если $\varkappa(B) = 1$ (соответственно $\delta(B) = 1$, $\alpha(B) = 1$).

Нетрудно показать, что в приведенных определениях можно вместо sup и inf поставить соответственно max и min.

Пусть T — выпуклое центрально-симметричное поглощающее множество в линейном пространстве E. Введем в E метрику Минковского относительно T, т. е. положим $\|x\| = \inf \alpha : \alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in T$, для каждого элемента $x \in E$, и обозначим полученное нормированное пространство через $M(T)$. Очевидна следующая

Лемма. *Пусть T_1 и T_2 — выпуклые центрально-симметричные поглощающие множества в линейном пространстве E и пусть для некоторых $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$*

$$a_1 T_1 \subseteq T_2 \subseteq a_2 T_1,$$

тогда $d(M(T_1), M(T_2)) \leqslant \frac{a_2}{a_1}$.

Теорема 1. *Пусть B — n-мерное пространство Минковского и пусть для некоторого базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ в B $\varkappa(\{e_i\}_{i=1}^n) = \varkappa$, $\delta(\{e_i\}_{i=1}^n) = \delta$. Имеет место неравенство*

$$d(B, c^n)\, d(B, l_1^n) \leqslant \frac{1}{2} \varkappa(\varkappa + 1)\,\delta n. \qquad (1)$$

Постоянная $\frac{1}{2}$ в неравенстве (1) *является точной при любом натуральном n.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ нормированным. Обозначим через C параллелепипед с вершинами во всех точках вида $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$, и через L — октаэдр с вершинами в точках $e_1, e_2, \ldots, e_n, -e_1, -e_2, \ldots, -e_n$. Пусть T — единичный шар в B и a_0 — наименьшее из таких чисел a, что для некоторых $\varepsilon_i = \pm 1$ точка $x = a \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i$ есть граничная точка тела T. Таким образом, для некоторых $\varepsilon_i^{(0)} = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ точка $x_0 = a_0 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{(0)} e_i$ есть граничная точка T. Докажем, что

$$a_0 C \subseteq T. \qquad (2)$$

Действительно, для любых $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$, $\varepsilon_i = \pm 1$, элемент $a_0 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i$ принадлежит T (в силу выбора a_0), но тогда, в силу выпуклости T, и выпуклая оболочка всех таких элементов есть подмножество в T, а эта выпуклая оболочка как раз и есть $a_0 C$.

Покажем, что

$$T \subseteq \frac{\varkappa + 1}{2} C. \qquad (3)$$

Действительно, предполагая, что включение (3) не имеет места, мы получим существование элемента $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, такого, что y есть внутренняя точка T и $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| = \frac{\varkappa+1}{2}$. $\left(\text{Не ограничивая общности, можно считать, что } \alpha_1 = \frac{\varkappa+1}{2}.\right)$ Тогда, прямо из определения координатной асимметрии, получаем, что элемент $y' = \frac{1}{\varkappa}\left(\alpha_1 e_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e_i\right)$ также является внутренней точкой T. Но тогда и элемент $\frac{1}{1+\varkappa} y + \frac{\varkappa}{1+\varkappa} y'$ как точка отрезка, соединяющего y и y', должен быть внутренней точкой T, в то время как

$$\frac{1}{1+\varkappa} y + \frac{\varkappa}{1+\varkappa} y' = \frac{1}{1+\varkappa} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \frac{1}{1+\varkappa}\left(\alpha_i e_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e_i\right) =$$
$$= \frac{2}{1+\varkappa} \alpha_1 e_1 = e_1,$$

а e_1 — граничная точка T. Полученное противоречие доказывает соотношение (3).

Легко видеть, что $M(C)$ изометрично c^n. Поэтому из соотношений (2), (3) и леммы получаем:

$$d(B, c^n) \leqslant \frac{\varkappa+1}{2a_0}. \tag{4}$$

Так как $\pm e_i \in T$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$L \subseteq T. \tag{5}$$

Покажем, что

$$n a_0 \varkappa \delta L \supseteq T. \tag{6}$$

Легко видеть, что x_0 есть граничная точка октаэдра $n a_0 L = L_1$. Покажем сначала, что $\varkappa \delta L_1 \supseteq T$. Предполагая противное, мы получим точку $z_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, такую, что $z_0 \notin \varkappa \delta L_1$, и являющуюся внутренней точкой T. Не нарушая общности, можно считать, что $\beta_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (так как можно было с самого начала вместо некоторых e_j брать $-e_j$). Из определения диагональной асимметрии вытекает, что и каждая из точек $z_k = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i+k} e_i$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ (где положено $\beta_{i+k} = \beta_{i+k-n}$ при $i + k > n$) является внутренней точкой T. Но тогда и точка $z = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k$ является внутренней точкой T.

Условие $z_0 \notin \varkappa \delta L_1 = n a_0 \varkappa \delta L$ означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i > n a_0 \varkappa \delta. \tag{7}$$

Имеем:

$$z = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}\beta_{i+k}e_i = \frac{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}{n\delta}\sum_{i=1}^{n}e_i$$

(т. е. точка z лежит на «биссектрисе» первого октанта базиса $\{e_i\}_{i=1}^{n}$).

Так как z является внутренней точкой T, то из определения координатной асимметрии вытекает, что и точка

$$w = \frac{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}{\varkappa n\delta}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{(0)}e_i$$

является внутренней точкой T. Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{(0)}e_i = \frac{x_0}{a_0}$, имеем $w = \frac{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}{\varkappa n\delta a_0}x_0$, и, в силу неравенства (7), x_0 подавно должна быть внутренней точкой T, в то время как x_0 есть граничная точка T. Полученное противоречие доказывает, что $\varkappa\delta L_1 \supseteq T$, т. е. $na_0\varkappa\delta\, L \supseteq T$.

Из соотношений (5), (6) и леммы, учитывая, что $M(L)$, очевидно, изометрично l_1^n, получаем

$$d(B,\ l_1^n) \leqslant na_0\varkappa\delta. \tag{8}$$

Из неравенств (4) и (8) вытекает неравенство (1).

Покажем, что постоянная $\frac{1}{2}$ в неравенстве (1) является точной при любом натуральном n. В качестве пространства B возьмем l_2^n; пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ — ортонормированный базис в l_2^n. Тогда $\varkappa(\{e_i\}_{i=1}^{n}) = 1, \delta(\{e_i\}_{i=1}^{n}) = 1$; имеем (см., например [1]): $d(B,\ c^n) = n^{\frac{1}{2}}$, $d(B,\ l_1^n) = n^{\frac{1}{2}}$, и таким образом в (1) имеет место равенство.

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если B — n-мерное симметричное пространство Минковского, то имеет место неравенство $d(B,\ c^n)\, d(B,\ l_1^n) \leqslant n$. Это неравенство — точное при любом натуральном n.*

Теорема 2. *Пусть для некоторого базиса $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ в n-мерном пространстве Минковского B $\varkappa(\{e_i\}_{i=1}^{n}) = \varkappa$, $\delta(\{e_i\}_{i=1}^{n}) = \delta$. Имеет место неравенство*

$$d(B,\ c^n) \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa(\varkappa+1)\,\delta n d\,(l_1^n,\ c^n)}{2}}. \tag{9}$$

Доказательство. Имеем (см., например [1], предложение 1):

$$d(B,\ l_1^n) \geqslant \frac{d(B,\ c^n)}{d\,(c^n,\ l_1^n)}. \tag{10}$$

Из неравенств (1) и (10) получаем

$$\frac{d^2(B, c^n)}{d(c^n, l_1^n)} \leqslant \frac{\varkappa(\varkappa+1)\delta n}{2},$$

откуда и вытекает неравенство (9).

Следствие 1. *Если B — n-мерное симметричное пространство Минковского, то $d(B, c^n) \leqslant \sqrt{n d(l_1^n, c^n)}$.*

Из теоремы 2 работы [1] вытекает неравенство

$$d(l_1^n, c^n) \leqslant C_n \sqrt{n},$$

где

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2^k, k = 1, 2, \ldots, \\ 1+\sqrt{2} & \text{при остальных } n. \end{cases}$$

Поэтому частным случаем теоремы 2 является также

Следствие 2. *Если B — n-мерное симметричное пространство Минковского, то $d(B, c^n) \leqslant D_n n^{\frac{3}{4}}$, где*

$$D_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2^k, \ k = 1, 2, \ldots, \\ \sqrt{1+\sqrt{2}} & \text{при остальных } n. \end{cases}$$

Отметим, что для произвольного n-мерного пространства Минковского известно лишь неравенство (см., например, [2]) $d(B, c^n) \leqslant n$.

Теорема 1 позволяет получить некоторую оценку проекционных констант $\lambda(B)$ (определение см. в работах [1] или [2]) n-мерных пространств Минковского. Нам понадобится следующее неравенство (см. [2]): для любых пространств Минковского B_1 и B_2

$$\lambda(B_1) \leqslant d(B_1, B_2)\lambda(B_2). \tag{11}$$

Теорема 3. *Пусть для некоторого базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ в n-мерном пространстве Минковского B $\varkappa(\{e_i\}_{i=1}^n) = \varkappa$, $\delta(\{e_i\}_{i=1}^n) = \delta$. Имеет место неравенство*

$$\lambda(B) \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa(\varkappa+1)\delta n \lambda(l_1^n)}{2}}. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. $d(B, c^n) \leqslant t$ (t выберем позже). Тогда, учитывая, что $\lambda(c^n) = 1$ (см. [2]), имеем из неравенства (11): $\lambda(B) \leqslant d(B, c^n)\lambda(c^n) = d(B, c^n) \leqslant t$.

2. $d(B, c^n) \geqslant t$, тогда по теореме 1, $d(B, l_1^n) \leqslant \frac{\varkappa(\varkappa+1)\delta n}{2d(B, c^n)} \leqslant \frac{\varkappa(\varkappa+1)\delta n}{2t}$, и из неравенства (11) получаем, что $\lambda(B) \leqslant d(B, l_1^n)\lambda(l_1^n) \leqslant \frac{\varkappa(\varkappa+1)\delta n}{2t}\lambda(l_1^n)$.

Выбирая t как корень уравнения $\frac{\varkappa(\varkappa+1)\delta n}{2t}\lambda(l_1^n)=t$, т. е. $t=$ $=\sqrt{\frac{\varkappa(\varkappa+1)\delta n\lambda(l_1^n)}{2}}$, мы в обоих случаях получаем неравенство (12). Теорема 3 доказана.

Следствие. *Если B — n-мерное симметричное пространство Минковского, то* $\lambda(B)\leqslant\sqrt{n\lambda(l_1^n)}$.

Отметим, что известно точное значение $\lambda(l_1^n)$, найденное Б. Грюнбаумом [2]: $\lambda(l_1^n)=2^{1-n}nC_{n-1,\frac{n-2}{2}}$.

(Поступила в редакцию 3/VI 1965 г.)

Литература

1. В. И. Гурарий, М. И. Кадец и В. И. Мацаев, О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p, Матем. сб., **70** (**112**), (1966), 481—489.
2. B. Grünbaum, Projection constants, Trans. Amer. Math. Soc., **95** (1960), 451—465.