УДК 513.881

О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p

В. И. Гурарий, М. И. Кадец, В. И. Мацаев (Харьков)

Пусть E_1 и E_2 — изоморфные банаховы пространства. Рассмотрим величину $d(E_1, E_2) = \inf\limits_T \|T\|\cdot\|T^{-1}\|$, где T пробегает всевозможные изоморфизмы E_1 на E_2. Очевидно, $d(E_1, E_2) = \inf\limits_T \|T\|$, где T пробегает несжимающие изоморфизмы E_1 на E_2, т. е. такие изоморфизмы, что $\|Tx\| \geqslant \|x\|$ для любого $x \in E_1$. Согласно Банаху и Мазуру (см., например, [1]) расстоянием между E_1 и E_2 называется величина $\rho(E_1, E_2) = \ln d(E_1, E_2)$.

Целью настоящей работы является оценка величины $d(E_1, E_2)$ (и тем самым величины $\rho(E_1, E_2)$) для случая пространств вида l_p^n $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$; $l_p^n (1 \leqslant p < \infty)$ (соответственно $l_\infty^n = c^n$) — это пространство совокупностей n вещественных чисел $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ с естественно определенными векторными операциями и нормой $\|\{\xi_i\}_{i=1}^n\| = \left(\sum\limits_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (соответственно $\|\{\xi_i\}_{i=1}^n\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|$).

Естественным базисом в l_p^n называется базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ вида $e_i = \{\xi_i^{(j)}\}_{j=1}^n$, где $\xi_i^{(j)} = 1$ при $j = i$, $\xi_i^{(j)} = 0$ при $j \neq i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих предложений.

Предложение 1. $d(E_1, E_3) \leqslant d(E_1, E_2)\, d(E_2, E_3)$.

Предложение 2. $d(E_1, E_2) = d(E_1^*, E_2^*)$, *где* E_1^*, E_2^* — *пространства сопряженные к* E_1 *и к* E_2 *соответственно.*

Лемма 1. *Для любых* $p_1 \geqslant 1$ *и* $p_2 \geqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n) \leqslant n^{\left|\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right|}.$$

Доказательство. Будем считать, что $p_1 \leqslant p_2$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_i\}_{i=1}^n$ — естественные базисы в $l_{p_1}^n$ и в $l_{p_2}^n$ соответственно. Определим изоморфизм T $l_{p_2}^n$ на $l_{p_1}^n$: $Tg_i = e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Легко видеть, что T — несжимающий оператор. Имеем:

$$\|T\| = \max_{\{\alpha_i\}_{i=1}^n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n |\alpha_i|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n |\alpha_i|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}}.$$

Нетрудно убедиться, что максимум последнего выражения достигается при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. Следовательно,

$$\|T\| = \frac{n^{\frac{1}{p_1}}}{n^{\frac{1}{p_2}}} = n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}.$$

Таким образом, $d(l^n_{p_1}, l^n_{p_2}) \leqslant n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *При любом натуральном n и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливо равенство* $d(l^n_p, l^n_2) = n^{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 достаточно доказать, что $d(l^n_p, l^n_2) \geqslant n^{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|}$. Пусть $2 \leqslant p \leqslant \infty$ (в силу Предложения 2 можно рассматривать только этот случай), $\{e_i\}_{i=1}^n$ — естественный базис в l^n_p, T—произвольный несжимающий изоморфизм l^n_p на l^n_2, $Te_i = g_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, можно последовательно выбирать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $|\alpha_i| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 g_1, \alpha_2 g_2) \geqslant 0,\\
&(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \alpha_3 g_3) \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1}, \alpha_n g_n) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Тогда, очевидно, $\|\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_p\| \geqslant \sqrt{n}$ и

$$\|T\| \geqslant \frac{\|\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_n\|}{\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|} \geqslant \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{p}}} = n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, \quad d(l^n_{p_1}, l^n_2) \geqslant n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1—2 и Предложения 1 вытекает

Теорема 1. *Если* $1 \leqslant p_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $\operatorname{sign}(2 - p_1) = \operatorname{sign}(2 - p_2)$, *то* $d(l^n_{p_1}, l^n_{p_2}) = n^{\left|\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right|}$.

Действительно, пусть, для определенности, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant 2$ (в силу предложения 2 можно ограничиться лишь этим случаем). Тогда, применяя предложение 1 и лемму 2, получим:

$$d(l^n_{p_1}, l^n_{p_2}) \geqslant \frac{d(l^n_{p_1}, l^n_2)}{d(l^n_{p_2}, l^n_2)} = \frac{n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}}} = n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}},$$

Используя лемму 1, получим обратное неравенство. Тем самым теорема 1 доказана.

В дальнейшем будет использовано неравенство Хинчина

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\alpha_j\right|^p \geqslant \left\{\gamma_p\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2}\right\}^p \quad (1\leqslant p<\infty) \tag{1}$$

(где постоянная Хинчина γ_p не убывает с ростом p, $\gamma_1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\gamma_{2+\lambda}=1$ при $\lambda\geqslant 0$) и вытекающее из неравенств со средними

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n} \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}}{n^{\frac{1}{p_1}}} \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}}{n^{\frac{1}{p_2}}} \tag{2}$$

$$(1\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant\infty) \qquad \alpha_i\geqslant 0; \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ где } r=\begin{cases}p \text{ при } p>2,\\ 2 \text{ при } 1\leqslant p\leqslant 2.\end{cases} \tag{3}$$

Теорема 2. *Если* $1\leqslant p_1\leqslant 2\leqslant p_2\leqslant\infty$, *то для любого натурального* n *имеет место неравенство*

$$\max\left\{\gamma_{p_2'} n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{2}}, \gamma_{p_1} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}\right\} \leqslant d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n) \leqslant \max\left\{C_{p_2,n} n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{2}}, C_{p_1,n} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}\right\}$$

где $\frac{1}{p_2'}+\frac{1}{p_2}=1$, γ_p — *постоянная Хинчина и*

$$C_{p,n}=\begin{cases}1 \text{ при } n=2^k \ (k=1, 2, \ldots),\\ (1+\sqrt{2})^{\frac{|2-p|}{p}} \text{ при остальных } n.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_i\}_{i=1}^n$, $\{f_i\}_{i=1}^n$ — естественные базисы в $l_{p_1}^n$, l_2^n, $l_{p_2}^n$ соответственно. Предположим сначала, что $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$ и что $n=2^k$ (k — натуральное число). Тогда существует матрица $\|\varepsilon_{ik}\|_{i,k=1}^n$ (матрица Уолша) такая, что $|\varepsilon_{ik}|=1$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, строки которой попарно ортогональны: $\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}=0$ $(i\neq j;\ i, j=1, 2, \ldots, n)$ (отметим, что такая матрица существует только при $n=2^k$ $(k=1, 2, \ldots)$). Матрицу Уолша U_n порядка 2^n можно определить индуктивным путем, полагая

$$U_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad U_{n+1}=\begin{pmatrix}U_n & U_n\\ U_n & -U_n\end{pmatrix}, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Пусть A — линейный оператор из $l_{p_1}^n$ в l_2^n, определяемый формулой $Ae_i=g_i$, $i=1, 2, \ldots, n$; B — линейный оператор из l_2^n в l_2^n, определяемый формулой

$Bg_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{n}}g_j$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, C — линейный оператор из l_2^n в $l_{p_2}^n$, определяемый формулой $Cg_i=f_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Оператор $U=CBA$ является изоморфизмом $l_{p_1}^n$ на $l_{p_2}^n$. Оценим $\|U^{-1}\|$. Так как, очевидно, оператор B унитарен, то (см. доказательство леммы 1)

$$\|U^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|C^{-1}\|=n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}=n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}.$$

Если $p_1=1$, $p_2=\infty$, то, оценивая $\|U\|=\|U\|_{1,\infty}$, имеем:

$$\|U\|_{1,\infty}=\sup_{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|=1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\varepsilon_{ik}}{\sqrt{n}}\right|\leqslant\sup_{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|=1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|\alpha_i\varepsilon_{ik}|}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Если $p_1=2$, $p_2=2$, то, учитывая, что B — унитарный оператор в l_2^n, имеем: $\|U\|=\|U\|_{2,2}=1$. Применяя интерполяционную теорему Рисса (см., например, [2]), получаем нужную нам оценку для $\|U\|=\|U\|_{p_1,p_2}$ $\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1\right)$:

$$\|U\|_{p_1,p_2}\leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}},$$

а для $n=2^k$ $(k=1, 2, \ldots)$ имеем:

$$d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n)\leqslant\|U^{-1}\|\cdot\|U\|\leqslant n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}}=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}=n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

Докажем теперь по индукции, что для любого натурального n и $1\leqslant p\leqslant 2$

$$d(l_p^n, l_q^n)\leqslant\alpha_0 n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},\ \text{где}\ \alpha_0=(1+\sqrt{2})^{\frac{2-p}{p}},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{5}$$

Предположим, что неравенство (5) справедливо для всех натуральных чисел, меньших данного n. Пусть $n=n_1+n_2$, где $n_1=2^k$, $n_2<n_1$, и пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_i\}_{i=1}^n$ — естественные базисы в l_p^n и в l_q^n соответственно, P_1,P_2—подпространства в l_p^n с базисами $\{e_i\}_{i=1}^{n_1}$ и $\{e_i\}_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}$, Q_1, Q_2 — подпространства в l_q^n с базисами $\{g_i\}_{i=1}^{n_1}$ и $\{g_i\}_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}$. В силу неравенства (4) существует несжимающий изоморфизм T_1 Q_1 на P_1 такой, что $\|T_1\|=t_1\leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$, и по предположению индукции существует несжимающий изоморфизм T_2 Q_2 на P_2 такой, что $\|T_2\|=t_2\leqslant\alpha_0 n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$.

Определим изоморфизм T пространства l_q^n на l_p^n, полагая для каждого элемента $x=x_1+x_2$, $x_1\in Q_1$, $x_2\in Q_2$, $Tx=T_1x_1+T_2x_2$.

Легко показать, что T — несжимающий оператор. Действительно, пусть $\|x\|^q=\|x_1\|^q+\|x_2\|^q=1$, т. е. $\|x\|=1$. Тогда, так как $\|x_1\|\leqslant 1$,

$\|x_2\|\leqslant 1$ и $p\leqslant q$, то

$$\|Tx\|=(\|Tx_1\|^p+\|Tx_2\|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant(\|x_1\|^p+\|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant(\|x_1\|^q+\|x_2\|^q)^{\frac{1}{p}}=1,$$

что и доказывает несжимаемость оператора T.

Пусть $\|x_1\|^q=a$, $\|x_2\|^q=1-a$, $0\leqslant a\leqslant 1$. Тогда

$$\|T\|^p=\max_{\|x_1+x_2\|=1}(\|Tx_1\|^p+\|Tx_2\|^p)=\max_{0\leqslant a\leqslant 1}[t_1^p a^{\frac{p}{q}}+t_2^p(1-a)^{\frac{p}{q}}]\leqslant$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant a\leqslant 1}\left[n_1^{1-\frac{p}{2}}a^{\frac{p}{q}}+\alpha_0^p n_2^{1-\frac{p}{2}}(1-a)^{\frac{p}{q}}\right].$$

Непосредственно подсчитывая этот максимум, получаем, что

$$\|T\|^p\leqslant\alpha_0^p n_1^{\frac{2-p}{2}}n_2^{\frac{2-p}{2}}\left(n_1^{-\frac{1}{2}}+\alpha_0^{\frac{p}{p-2}}n_2^{-\frac{1}{2}}\right)^{2-p}. \tag{6}$$

Покажем, что это выражение не превосходит $\alpha_0^p(n_1+n_2)^{\frac{2-p}{2}}$. Действительно, решая неравенство

$$\alpha_0^p n_1^{\frac{2-p}{2}}n_2^{\frac{2-p}{2}}\left(n_1^{-\frac{1}{2}}+\alpha_0^{\frac{p}{p-2}}n_2^{-\frac{1}{2}}\right)^{2-p}\leqslant\alpha_0^p(n_1+n_2)^{\frac{2-p}{2}}, \tag{7}$$

получим, что

$$\alpha_0\geqslant\left(\frac{\sqrt{n_1+n_2}+\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1}}\right)^{\frac{2-p}{p}}. \tag{8}$$

Так как $n_1>n_2$, то выражение в правой части неравенства (8) меньше чем $(1+\sqrt{2})^{\frac{2-p}{p}}$; отсюда, в силу неравенства (5), получаем справедливость неравенства (8), а следовательно, и неравенства (7). Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$\|T\|\leqslant\alpha_0(n_1+n_2)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}=\alpha_0 n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$d(l_p^n,\ l_q^n)\leqslant\alpha_0 n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Так как для $n=1$ неравенство (9) тривиально справедливо, то по индукции заключаем, что неравенство (9) имеет место для любого натурального n. Следовательно, при любом n

$$d(l_p^n,\ l_q^n)\leqslant(1+\sqrt{2})^{\frac{2-p}{p}}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{10}$$

Пусть теперь $1 \leqslant p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 \leqslant q_1$, где $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$. Положим $p_2' = \frac{p_2}{p_2 - 1}$. В силу Предложения 1, теоремы 1, неравенств (4) и (10), учитывая, что $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = 1$, имеем:

$$d(l_{p_1}^n,\ l_{p_2}^n) \leqslant d(l_{p_1}^n,\ l_{p_2'}^n)\, d(l_{p_2'}^n,\ l_{p_2}^n) \leqslant n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2'}} C_{p_2', n}\, n^{\frac{1}{p_2'} - \frac{1}{2}} =$$

$$= C_{p_2', n}\, n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}} = C_{p_2, n} n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}}.$$

Если же $1 \leqslant p_1 \leqslant 2 \leqslant q_1 < p_2 < \infty$, где $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, то получаем

$$d(l_{p_1}^n,\ l_{p_2}^n) \leqslant d(l_{p_1}^n,\ l_{q_1}^n)\, d(l_{q_1}^n,\ l_{p_2}^n) \leqslant C_{p_1, n} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1}} n^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_2}} = C_{p_1, n} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}},$$

и во всех рассмотренных случаях имеем

$$d(l_{p_1}^n,\ l_{p_2}^n) \leqslant \max\left\{C_{p_2, n}\, n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}},\ C_{p_1, n}\, n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}\right\},$$

где положено $C_{p,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2^k \ (k = 1, 2, \ldots), \\ (1 + \sqrt{2})^{\frac{|2-p|}{p}} & \text{при остальных } n, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \end{cases}$

Оценим теперь снизу $d(l_p^n,\ c^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_i\}_{i=1}^n$ — естественные базисы в l_p^n и в c^n соответственно и пусть T — произвольный изоморфизм l_p^n на c^n. Мы можем написать для некоторых матриц $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$, $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^n = A^{-1}$:

$$Te_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j, \quad T^{-1} g_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \quad \det A \det B = 1.$$

Вычислим $\|T\|$:

$$\|T\| = \max_{\{x_i\}_{i=1}^n} \frac{\left\|\sum_{i=1}^n x_i T e_i\right\|_{c^n}}{\left\|\sum x_i e_i\right\|_{l_p^n}} = \max_{\{x_i\}_{i=1}^n} \frac{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\left|\sum_{i=1}^n x_i a_{ij}\right|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} =$$

$$= \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{\{x_i\}_{i=1}^n} \frac{\left|\sum_{i=1}^n x_i a_{ij}\right|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{11}$$

Вычисляя $\|T^{-1}\|$, заметим предварительно, что $\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n y_j b_{ji}\right|^p$ является выпуклой функцией вектора $y = \{y_j\}_{j=1}^n$ и поэтому максимум ее в кубе $|y_j| \leqslant 1$

достигается на одной из вершин куба $y_0 = \{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Имеем:

$$\|T^{-1}\| = \max_{y \in c^n} \frac{\|T^{-1}y\|_{l_p^n}}{\|y\|_{c^n}} = \max_{\{y_j\}_{j=1}^n} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n y_j b_{ji}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |y_j|} \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j b_{ij}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим $\|T^{-1}\|$ снизу. Применяя неравенство (1), имеем:

$$\|T^{-1}\| \geqslant \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j b_{ji}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j b_{ji}\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{i=1}^n \left(\gamma_p \sqrt{\sum_{j=1}^n b_{ji}^2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

Из (11) и (12), используя неравенства (2), (3) и неравенство Адамара, получаем:

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \gamma_p \left(\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n b_{ji}^2\right|^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \gamma_p n^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n b_{ji}^2}\right)^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \gamma_p n^{\frac{1}{p}} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n b_{ji}^2}} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \gamma_p n^{\frac{1}{p}} \sqrt[n]{|\det B|} =$$

$$= \gamma_p n^{\frac{1}{p}} \frac{n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}{\sqrt[n]{|\det A|}} \geqslant \gamma_p n^{\frac{1}{2}} \frac{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}} \geqslant \gamma_p n^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$d(l_p^n, c^n) = \inf_T \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \geqslant \gamma_p n^{\frac{1}{2}} \quad (1 \leqslant p \leqslant 2). \tag{13}$$

Используя предложение 2, получаем, что

$$d(l_q^n, l_1^n) \geqslant \gamma_p n^{\frac{1}{2}} \quad \left(p = \frac{q}{q-1}, \quad 2 \leqslant q \leqslant \infty\right). \tag{14}$$

Пусть теперь $1 \leqslant p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 \leqslant \infty$. Применяя соотношение (13), Предложение 1 и теорему 1, имеем:

$$d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n) \geqslant \frac{d(l_{p_1}^n, c^n)}{d(l_{p_2}^n, c^n)} \geqslant \frac{\gamma_{p_1} n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{p_2}}} = \gamma_{p_1} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}.$$

С другой стороны, применяя неравенство (14) и теорему 1 и полагая $p_2' = \frac{p_2}{p_2 - 1}$ имеем:

$$d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n) \geqslant \frac{d(l_{p_2}^n, l_1^n)}{d(l_1^n, l_{p_1}^n)} \geqslant \frac{\gamma_{p_2'} n^{\frac{1}{2}}}{n^{1 - \frac{1}{p_1}}} = \gamma_{p_2'} n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}}.$$

Итак, в обоих случаях получаем, что $d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n) \geqslant \max \left\{ \gamma_{p_1} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}} \gamma_{p_2'} n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}} \right\}$.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что $C_{p,n} \leqslant 1 + \sqrt{2}$. Поэтому из доказанных теорем вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Если* $1 \leqslant p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, *то*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \max \left\{ n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}, n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}} \right\} \leqslant d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n) \leqslant (1 + \sqrt{2}) \max \left\{ n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}, n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}} \right\}.$$

Следствие 2. *Для любых* $p_1 \geqslant 1$, $p_2 \geqslant 1$ $d(l_{p_1}^n, l_{p_2}^n) \leqslant (1 + \sqrt{2}) \sqrt{n}$.

Применим доказанные теоремы к оценке абсолютных проекционных констант пространств l_p^n (абсолютной проекционной константой банахова пространства P называется величина $\lambda(P) = \sup\limits_B \lambda(P, B)$, где B пробегает всевозможные банаховы пространства, содержащие P как подпространство, а $\lambda(P, B) = \inf\limits_A \|A\|$, где A пробегает всевозможные операторы проектирования из B на P). Имеют место соотношения (см. [3])

$$\lambda(P_1) \leqslant d(P_1, P_2) \lambda(P_2), \tag{15}$$

$$\lambda(c^n) = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) и теорем 1—2 вытекает

Теорема 3. *Если* $2 \leqslant p \leqslant \infty$, *то* $\lambda(l_p^n) \leqslant n^{\frac{1}{p}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Если* $1 \leqslant p < 2$, *то* $\lambda(l_p^n) \leqslant C_{p,n} \sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где*

$$C_{p,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2^k \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ (1 + \sqrt{2})^{\frac{2-p}{p}} & \text{при остальных } n. \end{cases}$$

Следствие. *Для любого* p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

$$\lambda(l_p^n) \leqslant (1+\sqrt{2})\sqrt{n}.$$

Отметим, что Б. Грюнбаум [3] нашел точное значение для $\lambda(l_1^n)$, а также получил оценку для $\lambda(l_2^n)$, несколько лучшую, чем оценка $\lambda(l_2^n) \leqslant \sqrt{n}$.

(Поступила в редакцию 3/VI 1965 г.)

Литература

1. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.
2. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, Москва, ИЛ, 1948.
3. B. Grünbaum, Projection constants, Trans. Amer. Math. Soc., **95** (1960), 451—465.