Функциональный анализ и его приложения,
т. 14, вып. 4, 1980, 67—68.

УДК 513.88

О ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА БЕЗ ПОЛНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Б. В. Годун, М. И. Кадец

Система элементов $\{x_i\}_{i \in I}$ банахова пространства X называется *минимальной*, если каждый ее элемент не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных членов системы. Это эквивалентно тому, что существует система линейных функционалов $\{x_i^*\}_{i \in I} \subset X^*$ (называемая сопряженной к исходной системе) такая, что $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Если линейная оболочка системы $\{x_i\}_{i \in I}$ плотна в пространстве X ($[x_i] = X$), то систему $\{x_i\}_{i \in I}$ называют *полной*. Банахово пространство X называется *пространством Гротендика*, если в X^* слабая * и слабая сходимости последовательностей совпадают (см. [1], стр. 183). «Типичными» представителями гротендиковых пространств являются так называемые инъективные пространства и, в частности, $m(S)$ — пространство ограниченных на множестве S функций с равномерной нормой (см. [1], стр. 183). Известно [2], что нерефлексивное пространство Гротендика не может иметь полной минимальной системы, сопряженная к которой была бы тотальной. В этой заметке мы покажем, что некоторые гротендиковы пространства не имеют никаких полных минимальных систем.

Пусть τ — кардинальное число; через $m_\tau(S)$ обозначим подпространство пространства $m(S)$, состоящее из тех функций $x(s)$, у которых мощность носителя $S(x) = \{s \in S: x(s) \neq 0\}$ не превышает τ. Пусть T — подмножество S; условимся в дальнейшем отождествлять пространство $m_\tau(T)$ с (дополняемым) подпространством пространства $m_\tau(S)$, составленным из тех функций, носители которых лежат в T. Для нормированного пространства X через $\operatorname{dens} X$ будем обозначать его вес, т. е. минимальную мощность плотного в X множества.

Л е м м а. *Пусть* $X = m_\tau(S)$ *и* $\operatorname{Card} S > \tau$, Y — *такое подпространство в* X, *что фактор-пространство* $E = X/Y$ *рефлексивно. Тогда существует такое подмножество* $T \subset S$, *что* $\operatorname{Card} T \leqslant \tau$ *и* $m_\tau(S \setminus T) \subset Y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что утверждение леммы не имеет места. Поскольку $Y \neq m_\tau(S)$, существует элемент единичной нормы $x_1 \in X$, не принадлежащий Y. Положим $T_1 = S(x_1)$, и пусть $R_1 = S \setminus T_1$. Так как $\operatorname{Card} T_1 \leqslant \tau < \operatorname{Card} S$, то по предположению $m_\tau(R_1) \not\subset Y$. Значит, найдется элемент $x_2 \in m_\tau(R_1) \setminus Y$, $\|x_2\| = 1$. Положим $T_2 = T_1 \cup S(x_2)$ и $R_2 = S \setminus T_2$. Поскольку $\operatorname{Card} T_2 \leqslant \tau < \operatorname{Card} S$, найдется элемент $x_3 \in m_\tau(R_2) \setminus Y$, $\|x_3\| = 1$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим несчетное семейство элементов единичной нормы $\{x_i\} \not\subset Y$, носители которых попарно не пересекаются: $S(x_i) \cap S(x_j) = \varnothing$ $(i \neq j)$. Так как семейство $\{x_i\}$ несчетно, то оно содержит подпоследовательность $\{x_{i_n}\}$ такую, что нормы образов элементов при фактор-отображении $F: X \to E$ равномерно отделены от нуля: $\|F(x_{i_n})\| \geqslant \delta > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как последовательность $\{x_{i_n}\}_{n=1}^\infty$ нормирована и дизъюнктна, то она эквивалентна естественному базису пространства c_0. Тогда оператор $A = F|_{[x_{i_n}]}$ есть непрерывный линейный оператор, отображающий пространство, изометричное c_0, в рефлексивное пространство E. Значит, оператор A компактен. Поскольку последовательность $\{x_{i_n}\}_{n=1}^\infty$ слабо сходится к нулю (как естественный базис пространства c_0), последовательность образов $\{A(x_{i_n})\}_{n=1}^\infty$ должна сходиться к нулю в нормированной топологии пространства E. Но для всех $n = 1, 2, \ldots$ $\|A(x_{i_n})\| = \|F(x_{i_n})\| \geqslant \delta > 0$. Пришли к противоречию.

Т е о р е м а 1. *Если* $\operatorname{Card} S > 2^\tau$, *то пространство* $m_\tau(S)$ *не имеет полных минимальных систем* *).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что вопреки утверждению теоремы пространство $X = m_\tau(S)$ имеет полную минимальную систему $\{x_i\}_{i \in I}$. Можно показать, что $m_\tau(S)$ изоморфно пространству $C(Q)$, где Q — некоторый σ-стоуновский компакт, откуда следует, что $m_\tau(S)$ — пространство Гротендика (см. [3], [4]). Поэтому, согласно одной теореме В. Джонсона [1], пространство $\Gamma = [x_i^*]$ должно быть рефлексивным. Обозначим через $Y = \Gamma_\perp$ аннулятор Γ в пространстве X и положим $E = X/Y$. Так как рефлексивное подпространство сопряженного пространства слабо * замкнуто

*) В случае $\tau = \aleph_0$ эта теорема несколько ранее была доказана А. Н. Пличко.

(см. [4], предложение 1), то $\Gamma = (\Gamma_\perp)^\perp = Y^\perp = E^*$. Значит, пространство E рефлексивно, поскольку рефлексивно его сопряженное. Согласно лемме существует такое множество $T \subset S$, что $\operatorname{Card} T \leqslant \tau$ и $m_\tau(S \setminus T) \subset Y$. Пусть P — естественный проектор из $m_\tau(S)$ на $m_\tau(T) = m(T)$: $P(x) = x|_T$. Для каждого $i \in I$ обозначим $z_i = P(x_i)$. Так как $x_i - z_i \in m_\tau(S \setminus T) \subset Y$, то для всех $i, j \in I$ имеем: $x_j^*(z_i) = x_j^*(x_i) - x_j^*(x_i - z_i) = x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$. Следовательно, $\{z_i\}_{i\in I}$ — минимальная система в пространстве $m(T)$. Значит, $\operatorname{Card} I = \operatorname{Card} \{z_i\}_{i\in I} \leqslant \operatorname{Card} m(T) = 2^{\operatorname{Card} T} \leqslant 2^\tau$. С другой стороны, так как система $\{x_i\}_{i\in I}$ полна в $m_\tau(S)$, то $\operatorname{Card} I \geqslant \operatorname{Card} S$. Таким образом, $\operatorname{Card} I \leqslant 2^\tau < \operatorname{Card} S \leqslant \operatorname{Card} I$ — это противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Если $X = m_\tau(S)$ и $\operatorname{Card} S > 2^\tau$, то каждое фактор-пространство X веса* $\operatorname{dens} X$ *не имеет полных минимальных систем.*

Действительно, как было замечено В. Девисом и В. Джонсоном (см. [5], замечание 5), наличие в гротендиковом пространстве Z полной минимальной системы эквивалентно существованию у Z рефлексивного фактор-пространства веса $\operatorname{dens} Z$. Пусть E — некоторое фактор-пространство X веса $\operatorname{dens} X$. Поскольку пространство E^* отождествимо со слабо * замкнутым подпространством в X^*, то E — пространство Гротендика. Если предположить, что E имеет полную минимальную систему, то оно должно иметь рефлексивное фактор-пространство E_1 веса $\operatorname{dens} E_1 = \operatorname{dens} E = \operatorname{dens} X$. Легко видеть, что E_1 само является фактор-пространством X, и, значит, X должно иметь полную минимальную систему.

Пространство $m(S)$ естественным образом можно трактовать как пространство непрерывных функций на стоун—чеховской компактификации множества S. Известно, что пространство $m(S)$ имеет полную биортогональную, ограниченную систему (т. е. $\sup \| x_i \| \cdot \| x_i^* \| \leqslant C < \infty$, см. [5]). Как показывает следующая теорема, такие системы в пространстве $m(S)$ обладают некоторым «странным» свойством.

Теорема 2. *Пусть $X = C(K)$ — пространство Гротендика и $\{x_i\}_{i\in I}$ — полная минимальная ограниченная система в X. Тогда каждая подпоследовательность системы $\{x_i\}_{i\in I}$ содержит подпоследовательность, эквивалентную естественному базису пространства l_1.*

Доказательство. Будем считать, что $\| x_i \| = 1$ и $\| x_i^* \| \leqslant C$ $(i \in I)$. Так пространство X гротендиково, то пространство $\Gamma = [x_i^*] \subset X^*$ рефлексивно и его единичный шар U слабо компактен. Рассмотрим произвольную подпоследовательность $\{x_{i_n}\}_{n=1}^\infty$ системы $\{x_i\}_{i\in I}$ и предположим, что она слабо фундаментальна. Тогда последовательность $\{x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится к нулю, и согласно критерию слабой компактности ограниченных множеств в пространстве $C(K)^*$ (см. [6], стр. 389) эта сходимость к нулю должна быть равномерной на множестве U:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{f\in U} | f(x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}) | = 0.$$

Но из минимальности системы $\{x_i\}_{i\in I}$ для любого $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\sup_{f\in U} | f(x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}) | \geqslant \frac{1}{C} | x_{i_{2k}}^* (x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}) | = \frac{1}{C}.$$

Таким образом, никакая подпоследовательность системы $\{x_i\}_{i\in I}$ не может быть слабо фундаментальной. Заключение теоремы теперь следует из известной характеризации Х. Розенталя пространств, содержащих l_1 (см. [7]).

Харьковский институт инженеров
коммунального строительства

Поступило в редакцию
5 марта 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дей М. М., Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961. 2. Johnson W. B., Proc. Amer. Math. Soc. 26, № 3 (1970), 467—468. 3. Lindenstrauss J., Tzafriri L., Classical Banach Spaces, Berlin, Springer-Verlag, 1973. 4. Rosenthal H. P., J. Funct. Anal. 6 (1969), 176—214. 5. Davis W. J., Johnson W. B., Studia Math. 45, № 2 (1973), 173—179. 6. Эдвардс Р., Функциональный анализ, М., «Мир», 1969. 7. Rosenthal H. P., Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71 (1974), 2411—2413.