Операторные базисы в пространствах Банаха

В. Ф. Гапошкин (Москва) и **М. И. Кадец** (Харьков)

Согласно известному определению И. Шаудера [3] система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства E называется базисом, если каждый элемент $x \in E$ разлагается в ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \tag{1}$$

сходящийся к x, причем разложение единственно. Наряду с исследованием свойств базисов ряд авторов занимался обобщением этого понятия. Так, А. И. Маркушевичу [4] принадлежит понятие «базиса в широком смысле слова»*; В. Я. Козлов [5] и Гельбаум [6] независимо друг от друга ввели «базисы суммирования» **; ряд свойств этих базисов был исследован в работе [7]. Последнее определение представляется полезным в том отношении, что оно существенно расширяет класс систем, по которым можно эффективно разлагать элементы банаховых пространств.

Однако, как показывает следующее предложение, понятие базиса суммирования не является достаточно общим: *Для каждого не безусловного базиса $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует такая перестановка его членов, что полученная последовательность не будет базисом суммирования ни при каком методе Тёплица.*

Действительно, найдутся элемент $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ и линейный функционал f, такие, что ряд $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f(x_k)$ сходится не абсолютно. Переставим члены этого ряда так, чтобы он сходился к числу, отличному от $f(x)$. Соответствующая перестановка членов базиса и будет требуемой последовательностью.

Данная статья является дальнейшим естественным продвижением по пути обобщения понятия базиса. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система элементов банахова пространства E. Линейную оболочку первых n элементов этой системы будем обозначать через X_n.

---

* «Базисом в широком смысле слова» называется любая полная минимальная система с тотальной сопряженной системой.

** Для базиса суммирования все ряды (1) суммируются некоторым линейным методом Тёплица $T = \| t_{nk} \|$ к x.

Определение 1. Система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется операторным базисом, если найдется последовательность линейных операторов T_n, обладающая следующими свойствами:

1) Каждый оператор T_n действует в соответствующем X_n;

2) $T_n x_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k \quad (k=1, 2, \ldots)$.

3) Для каждого элемента $x \in E$ существует единственное разложение

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

такое, что

$$\lim_{n\to\infty} T_n S_n x = x,$$

где

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Из условия 2) и единственности разложения следует линейная независимость системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Замечание 2. Условие 2) естественно наложить не только для того, чтобы разложение каждого элемента системы $\{x_k\}$ совпадало с этим элементом, но и потому, что системы, удовлетворяющие лишь условиям 1) и 3), могут не являться минимальными системами. Пусть, например, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — любая линейно независимая, но не минимальная система в гильбертовом пространстве. Пусть система $\{l_k\}$ получается из $\{x_k\}$ процессом ортогонализации Шмидта. Определим операторы T_n при помощи соотношений:

$$T_n x_k = l_k; \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \quad n=1, 2, \ldots .$$

Если $a_k = (x, l_k) \quad (k=1, 2, \ldots)$ и $S_n x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$, то $T_n S_n x = \sum_{k=1}^{n} a_k l_k \to x$, и подобное разложение $x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ единственно.

Замечание 3. Класс операторных базисов включает в себя, в частности, все базисы суммирования, соответствующие линейным методам Тёплица с матрицами $T = \| t_{nk} \|$, $t_{nk} = 0 \quad (k > n)$.

Замечание 4. Дальнейшее обобщение определения 1 заключается во введении кратных операторных базисов. Приведем, например, определение двойного операторного базиса. Система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется двойным операторным базисом, если существует двойная последовательность линейных операторов $\{T_{nm}\}$ такая, что:

1) операторы T_{nm} $(n=1, 2, \ldots)$ отображают X_m в себя; $m=1, 2, \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} T_{nm} x_k = x_k$, $k=1, 2, \ldots$;

3) для каждого $x \in E$ существует единственное разложение

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} T_{nm}S_m x = x.$$

Частным случаем подобных систем являются базисы суммирования с любой матрицей Тёплица $T = \| t_{nk} \|$; для них $T_{nm}x_k = \left(\sum_{p=k}^{m} t_{np}\right) x_k$. Свойства кратных операторных базисов подобны свойствам операторных базисов; во избежание громоздких доказательств мы будем вести все изложение применительно к операторным базисам.

Теорема 1. *Каждый операторный базис является минимальной системой* *.

Доказательство. Рассмотрим пространство A, состоящее из всех последовательностей коэффициентов $\hat{a} = \{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ разложений (1) элементов $x \in E$. Это — линейное пространство с обычным определением сложения элементов и умножения их на скаляры. Введем обозначение: $T_n x_k = x_k^{(n)}$ $(k \leqslant n)$. Согласно условию 2)

$$x_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Так как согласно условию 3)

$$T_n S_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \tag{3}$$

то в пространстве A можно ввести топологию с помощью счетного числа полунорм:

$$\| \hat{a}(x) \|_{(0)} = \sup_m \| T_m S_m x \|;$$

$$\| \hat{a}(x) \|_{(n)} = \sup_{k\leqslant n} \left\| \sum_{s=1}^{k} a_s x_s^{(n)} \right\| \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Проверим полноту пространства A. Пусть $\hat{a}^{(p)} = \{a_k(x^{(p)})\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{a_k^{(p)}\}$, и

$$\| \hat{a}^{(p)} - \hat{a}^{(q)} \|_{(n)} \underset{p,\, q\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Заметим прежде всего, что из соотношения (3) следует неравенство

$$\| x \| \leqslant \| \hat{a}(x) \|_{(0)}. \tag{3'}$$

Поэтому из соотношения (5) вытекает, что $x^{(p)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} x$, $x \in E$. Покажем, что справедливы соотношения:

$$a_k^{(p)} - a_k^{(q)} \underset{p,\, q\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Фиксируем любое k. Так как элементы x_s, $s = 1, 2, \ldots, k$, линейно независимы, то из соотношений (2) следует, что при $n \geqslant n_k$ элементы $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}$

* Т. е. существует сопряженная система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in \overline{E}$, $f_k(x_j) = \delta_{kj}$.

тоже линейно независимы. Из соотношения (5) следует, что

$$\sum_{s=1}^{k} x_s^{(n_k)} \left(a_s^{(p)} - a_s^{(q)}\right) \underset{p,\, q \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда, как известно (см. например, [9]), при $s = 1, 2, \ldots, k$

$$a_s^{(p)} - a_s^{(q)} \underset{p,\, q \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Из соотношения (6) вытекает, что существуют числа a_k такие, что

$$a_k^{(p)} - a_k \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Осталось показать, что $\hat{a} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in A$ и $\| \hat{a}^{(p)} - \hat{a} \|_{(n)} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Введем обозначение $\hat{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ и покажем, что $T_n \hat{S}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. Имеем:

$$\| T_n \hat{S}_n - x \| = \| T_n \hat{S}_n - T_n S_n x^{(p)} \| + \| T_n S_n x^{(p)} - x^{(p)} \| + \| x^p - x \|. \tag{8}$$

Из соотношений (4) и (7) следует, что при $p \geqslant p_0(\varepsilon)$ и при всех n

$$\| T_n \hat{S}_n - T_n S_n x^{(p)} \| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - a_k^{(p)}\right) x_k^{(n)} \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выбирая сначала достаточно большое p, а затем N, получим, что при $n > N$

$$\| T_n \hat{S}_n - x \| < \varepsilon,$$

т. е. $T_n \hat{S}_n \to x$, откуда следует, что $a_k = a_k(x)$, т. е. $\hat{a} \in A$. Заодно мы получим, что $\| \hat{a}^{(p)} - \hat{a} \|_{(0)} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Соотношения $\| \hat{a}^{(p)} - \hat{a} \|_{(n)} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ получаются из соотношений (5) очевидным предельным переходом. Итак, A — полное пространство типа (F). Так как отображение $x \leftrightarrow \hat{a}(x)$ взаимно однозначно и, в силу соотношения (3'), непрерывно в одну сторону, то по теореме Банаха (см. [8], стр. 111) мы получаем, что

$$\| \hat{a}(x) \|_{(n)} \leqslant M_n \| x \| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Отсюда, снова пользуясь линейной независимостью элементов $x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}$ при $n \geqslant n_k$, определением n-й полунормы и леммой из книги [9], мы получим, что

$$| a_k(x) | \leqslant \overline{M}_k \| x \| \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

для всех $x \in E$, где $\overline{M}_k$ — некоторые константы. Так как, очевидно, $a_k(x_j) = \delta_{kj}$, то теорема 1 доказана. Будем обозначать сопряженную систему функционалов через f_k.

Теорема 2. *Линейная оболочка Γ системы $\{f_k\}$, сопряженной к операторному базису, является нормирующим множеством.*

Доказательство. Линейное множество $\Gamma \subset \overline{E}$ называется нормирующим, если

$$\inf_{x \in E} \sup_{f \in \Gamma} \frac{f(x)}{\| x \| \, \| f \|} > 0.$$

Согласно теореме Банаха ([1], стр. 181) множество будет нормирующим в том и только том случае, если каждый линейный функционал $f \in \overline{E}$ является пределом слабо сходящейся последовательности $\varphi_n \in \Gamma$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \quad (x \in E),$$

или, иначе говоря, если слабое производное множество Γ_1 совпадает с $\overline{E}$. Пусть $\{t_{ij}^{(n)}\}_{i, j=1}^{n}$ — матрица оператора T_n в базисе $\{x_j\}_{j=1}^{n}$:

$$T_n x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(n)} x_j \quad (i \leqslant n;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Для произвольного $f \in \overline{E}$ образуем последовательность $\varphi_n \in \Gamma$:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(n)} f(x_j) f_i.$$

Так как $\varphi_n(x) = f(T_n S_n x)$, то соотношение $\varphi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$ следует из соотношения (3).

Замечание 5. Из наших рассуждений вытекает, что для последовательности операторов $\{T_n^*\}$, $T_n^* f_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}^{(n)} f_k$ $(j \leqslant n)$, и для любого $f \in \overline{E}$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) f_k$, $\overline{S}_n f = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) f_k$, имеем: $T_n^* \overline{S}_n f \xrightarrow[n \to \infty]{} f$, $T_n^* f_j \xrightarrow[n \to \infty]{} f_j$, где сходимость понимается как слабая сходимость функционалов. Однако отсюда, вообще говоря, не следует, что система $\{f_k\}$ является операторным базисом в Γ.

Теорема 3. *В сепарабельном гильбертовом пространстве E каждая полная минимальная система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ с полной сопряженной системой $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть операторный базис.*

Доказательство. Пусть

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x, y_k) x_k.$$

Для данного n определим множество Z_n элементов z таких, что

$$(z, y_k) = (x, y_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

В частности, Z_n содержит элементы x и $S_n x$. Элемент множества Z_n, имеющий наименьшую норму, обозначим через $Q_n S_n x$. Очевидно, что $Q_n S_n x$ является ортогональной проекцией любого элемента $x \in Z_n$ на линейную оболочку Y_n элементов $\{y_k\}_{k=1}^{n}$. Так как множество $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ полно в H, а последовательность $Q_n S_n x$ ограничена ($\| Q_n S_n x \| \leqslant \| x \|$), то из равенства (11) следует слабая сходимость последовательности Q_nS_nx к элементу x. Из того, что

$$Q_nS_nx \xrightarrow{\text{сл}} x; \quad \| Q_nS_nx \| \leqslant \| x \|,$$

следует сильная сходимость

$$\lim_{n\to\infty} Q_nS_nx = x.$$

Рассмотрим теперь ортогональную проекцию $P_nQ_nS_nx$ элемента Q_nS_nx на X_n. Последовательность $P_nQ_nS_nx$ сходится к x:

$$\| x - P_nQ_nS_nx \| \leqslant \| x - P_nx \| + \| P_nx - P_nQ_nS_nx \| \leqslant \| x - P_nx \| + \| x - Q_nS_nx \|.$$

Таким образом, система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть операторный базис, причем оператор T_n есть произведение двух проекторов

$$T_n = P_nQ_n.$$

Теорема 3 по существу содержится в работе С. С. Левина [2]. Возникает вопрос, существует ли в пространстве Банаха полная минимальная система с тотальной сопряженной, не являющаяся операторным базисом. Для ответа нам потребуется предложение о биортогональных системах в произвольном линейном пространстве.

Теорема 4. *Пусть E — линейное пространство;*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{12}$$

— линейно независимая система его элементов. Пусть далее

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{13}$$

— тотальное линейно независимое множество линейных функционалов, определенных в E. Линейную оболочку множества (13) *обозначим через* Γ. *Допустим еще, что последовательность* (12) *тотальна относительно* Γ (*это значит, что функционал f, аннулирующий все x_k, есть тождественный нуль*). *Существует минимальная система $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ с сопряженной $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что $y_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ki}x_i$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а линейная оболочка множества $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ совпадает с* Γ.

Доказательство. Проведем следующий процесс биортогонализации. В последовательности (13) возьмем первый элемент, не аннулирующий x_1; обозначим его через ψ_1. Построим линейную комбинацию элементов x_1 и x_2, такую, что

$$\psi_1(a_{11}x_1 + x_2) = 0. \tag{14_1}$$

Введем обозначения: $x_1 = y_1$, $a_{11}x_1 + x_2 = y_2$. Из множества f_k, оставшегося после удаления ψ_1, выберем первый элемент, не аннулирующий y_2; обозначим его через ψ_2. Построим линейную комбинацию элементов y_1, y_2 и x_3, такую, что

$$\psi_1(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + x_3) = 0; \quad \psi_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + x_3) = 0. \tag{14_2}$$

Введем обозначение: $a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + x_3 = y_3$. Из множества f_k, оставшегося после удаления ψ_1 и ψ_2, выберем первый элемент, не аннулирующий y_3; обозначим его через ψ_3. Описанный процесс продолжим неограниченно. Выбор функционала ψ_k каждый раз возможен в силу тотальности множества (13). Система уравнений (14_k) при любом k имеет единственное решение $\{a_{kj}\}_{j=1}^{k}$. Покажем еще, что будут использованы все f_k. Допустим, что множество $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ останется неиспользованным, и рассмотрим его первый элемент f_{n_1}. В процессе биортогонализации наступит такой этап, после которого функционал f_{n_1} станет первым в последовательности, оставшейся от (13) после удаления из нее $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ (m — номер указанного этапа). Наше допущение означает, что f_{n_1} аннулирует все элементы x_k, кроме, быть может, тех, которые уже были использованы:

$$f_{n_1}(x_k) = 0 \quad (k = m+1,\ m+2,\ \ldots). \tag{15}$$

Так как система (12) тотальна относительно Γ, то из соотношения (15) следует, что f_{n_1} есть линейная комбинация элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, а это противоречит линейной независимости системы (13). Итак, из системы (12) мы получили путем треугольного преобразования последовательность

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,$$

а из системы (13) с помощью перестановки — последовательность

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots.$$

Элементы этих последовательностей связаны соотношением

$$\psi_k(y_k) \neq 0; \quad \psi_i(y_k) = 0 \quad (i < k;\ \ k = 1, 2, \ldots).$$

Определим еще последовательность $\varphi_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_{ki}\psi_i$ из уравнений

$$\varphi_k(y_j) = \delta_{kj} \quad (j \leqslant k;\ \ k = 1, 2, \ldots)$$

и получим требуемую систему

$$y_1, y_2, \ldots; \quad \varphi_1, \varphi_2, \ldots; \quad \varphi_k(y_j) = \delta_{kj}.$$

Теорема 5. *Если в банаховом пространстве есть тотальное, но не нормирующее множество линейных функционалов, то в этом пространстве существует полная минимальная система с тотальной сопряженной, не являющаяся операторным базисом.*

Эта теорема является следствием теорем 2 и 4.

В рефлексивном пространстве каждое тотальное множество является нормирующим. Пример тотального, но не нормирующего множества в пространстве (c) построен С. Мазуркевичем (см. [1], стр. 178). Неизвестно, существует ли такое множество в любом нерефлексивном пространстве.

Поскольку последовательность операторов T_n, обладающих свойствами 1) — 3), можно задавать с помощью совокупности матриц $\| t_{kp}^{(n)} \|_{k,p=1}^{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то по аналогии с определением безусловного базиса можно ввести следующее определение. Операторный базис $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется безусловным, если любая его перестановка $\{x_k'\}_{k=1}^{\infty}$ является операторным базисом относительно операторов $\{T'_n\}$, матрица каждого из которых в базисе $\{x'_k\}_{k=1}^{\infty}$ совпадает с $\| t_{kp}^{(n)} \|_{k,\, p=1}^{n}$.

Теорема 6. *Каждый безусловный операторный базис является безусловным базисом.*

Доказательство. Если бы система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ не являлась безусловным базисом, то некоторая ее перестановка не была бы базисом. Предположим для упрощения обозначений, не ограничивая общности, что сама система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ не является базисом и что $\|x_k\|=1$ $(k=1, 2, \ldots)$. Тогда не существует такой константы M, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k \right\| \leqslant M \|x\|, \quad x \in E, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Поэтому можно последовательно выбрать такие натуральные числа n_j, $n_{j+1} - n_j > n_{j-1}$ $(j \geqslant 1)$, $n_0 = 0$, и такие элементы y_j, $\| y_j \| < \frac{1}{2^j}$, $j=1,2,\ldots$, что

$$y_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} f_i(y_j) x_i,$$

$$\sup_{n_{j-1}+1 \leqslant k \leqslant n_j} \left\| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{k} f_i(y_j) x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{l_j} f_i(y_j) x_i \right\| = 2^j. \tag{16}$$

Введем обозначения:

$$z_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{l_j} a_i x_i, \quad \|z_j\| = 2^j, \quad a_i = f_i(y_j) \quad (n_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant l_j), \quad j=1, 2, \ldots,$$

остальные $a_j=0$. По условию система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является операторным базисом относительно некоторой последовательности операторов $\widetilde{T}_n$, задаваемых в базисах $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ матрицами $\{t_{kj}^{(n)}\}_{k,\, j=1}^{n}$. Из определения операторного базиса и минимальности системы $\{x_k\}$ вытекает, что

$$t_{kj}^{(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \delta_{kj} . \tag{17}$$

Поэтому, используя равенство (16) и свойство 2) операторного базиса, можно выбрать такое $n_{m_1} = k_1$, $k_1 > l_1$, $m_1 > 1$, что:

$$\| \widetilde{T}_{k_1} z_1 \| > \frac{3}{2} \tag{18$_1$}$$

и

$$\sum_{j=1}^{l_1} |a_j| \sum_{s=l_1+1}^{n_1} | t_{js}^{(k_1)} | < \frac{1}{4} . \tag{19$_1$}$$

Будем одновременно строить перестановку системы и ряд для некоторого $x' \in E$ по этой перестановке, не суммируемый с помощью соответствующей последовательности операторов. Будем называть «отрезком» $[p, q]$ совокупность элементов системы с номерами от p до q. Тогда первые n_{m_1+1} членов перестановки будут иметь вид:

$$[1, l_1]\,[n_{m_1}+1, n_{m_1}+n_1-l_1]\,[n_1+1, n_{m_1}]\,[l_1+1, n_1]\,[n_{m_1}+n_1-l_1+1, n_{m_1+1}].$$

Образуем соответствующие члены ряда:

$$a_1x_1 + \ldots + a_{l_1}x_{l_1} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{k_1-l_1} + a_{l_1+1}x_{l_1+1} + \ldots + a_{n_1}x_{n_1} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{n_{m_1+1}-k_1-n_1+l_1}.$$

Тогда, обозначая частные суммы этого ряда через S_i', а соответствующие операторы — через T_i', мы получим, что

$$S_{k_1}' = z_1, \tag{20$_1$}$$

$$\|\widetilde{T}_{k_1}S_{k_1}' - T_{k_1}'S_{k_1}'\| = \left\|\sum_{i=1}^{l_1} a_i \sum_{s=1}^{k_1} t_{is}^{(k_1)}x_s - \sum_{i=1}^{l_1} a_i \sum_{s=1}^{k_1} t_{is}^{(k_1)}x_s'\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{l_1} a_i \sum_{s=l_1+1}^{n_1} t_{is}^{(k_1)}(x_s - x_s')\right\| < \frac{1}{2}. \tag{21$_1$}$$

Поэтому, в силу соотношений (18$_1$) и (20$_1$),

$$\|T_{k_1}'S_{k_1}'\| > 1. \tag{22$_1$}$$

Рассмотрим теперь систему, в которой на местах от $n_{m_1+1}+1$ и далее стоят члены системы $\{x_k\}_{k=n_{m_1+1}+1}^{\infty}$ в их старом порядке, а первые n_{m_1+1} элементов образованы только что описанным образом.

Эта перестановка системы $\{x_k\}$ является базисом относительно последовательности соответствующих операторов $\widetilde{\widetilde{T}}_n$. Поэтому, снова используя соотношение (16) и свойство 2) из определения операторного базиса, можно выбрать $k_2 = n_{m_2}$, $m_2 > m_1 + 2$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\widetilde{\widetilde{T}}_{k_2}(y_1 + z_{m_1+2})\| > 2^{m_1+2} - \frac{3}{4} \tag{18$_2$}$$

и

$$\sum_{j=1}^{l_{m_1+2}} |a_j| \sum_{s=l_{m_1+2}+1}^{n_{m_1+2}} |t_{js}^{(k_2)}| < \frac{1}{8}. \tag{19$_2$}$$

Образуем элементы переставленной системы с номерами от $n_{m_1+1}+1$ до n_{m_2+1}:

$$[n_{m_1+1}+1,\ l_{m_1+2}]\,[n_{m_2}+1,\ n_{m_2}+n_{m_1+2}-l_{m_1+2}]\,[n_{m_1+2}+1,\ n_{m_2}]$$
$$[l_{m_1+2}+1,\ n_{m_1+2}]\,[n_{m_2}+n_{m_1+2}-l_{m_1+2}+1,\ n_{m_2+1}].$$

Соответствующие члены ряда будут иметь вид:

$$a_{n_{m_1+1}+1}x_{n_{m_1+1}+1} + \ldots + a_{l_{m_1+2}}x_{l_{m_1+2}} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{k_2-l_{m_1+2}} +$$
$$+ a_{l_{m_1+2}+1}x_{l_{m_1+2}+1} + \ldots + a_{n_{m_1+2}}x_{n_{m_1+2}} + \underbrace{0 + \ldots + 0.}_{n_{m_2+1}-k_2-n_{m_1+2}+l_{m_1+2}}$$

Мы получим:

$$S_{k_2}' = y_1 + z_{m_1+2}, \tag{20$_2$}$$

$$\|\widetilde{\widetilde{T}}_{k_2}S_{k_2}' - T_{k_2}'S_{k_2}'\| \leqslant 2\sum_{j=1}^{l_{m_1+2}} |a_j| \sum_{s=l_{m_1+2}+1}^{n_{m_1+2}} |t_{js}^{(k_2)}| < \frac{1}{4}, \tag{21$_2$}$$

поэтому из соотношения (18_1) следует, что

$$\| T'_{k_2} S'_{k_2} \| > 2^{m_1+2} - 1. \tag{22_2}$$

Продолжая описанный процесс неограниченно, мы получим такую перестановку $\{x'_k\}$ системы $\{x_k\}$ и такой элемент

$$x' = y_1 + y_{m_1+2} + y_{m_2+2} + \ldots, \quad \| x' \| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1, \quad m_{i+1} - m_i > 2,$$

что для соответствующих операторов T'_i и частных сумм $S'_i(x')$ будут выполняться неравенства:

$$\| T'_{k_n} S'_{k_n} \| > 2^{m_{n-1}+2} - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{22_n}$$

$$(m_0 = -1).$$

Соотношения (22_n) показывают, что данная перестановка не является операторным базисом, а это противоречит нашим предположениям. Теорема 6 доказана.

Как следует из теоремы 3, теорема 6 перестает быть справедливой, если в определении безусловного операторного базиса не требовать, чтобы система матриц $\| t_{kj}^{(n)} \|_{k,j=1}^{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ была одной и той же для всех перестановок системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В заключение отметим, что вопрос о существовании операторного базиса в произвольном банаховом пространстве остается открытым.

(Поступило в редакцию 25/XI 1960 г.)

Литература

1. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.
2. С. С. Левин, Integralgleichungen und Funktionalräume, Матем. сб., **39** (1932), 3—72.
3. I. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Z., **26** (1927), 47—65.
4. А. И. Маркушевич, О базисе (в широком смысле слова) для линейных пространств, ДАН СССР, т. **41**, № **6** (1943), 241—244.
5. В. Я. Козлов, Об одном обобщении понятия базиса, ДАН СССР, т. **73**, № **4** (1950), 643—646.
6. B. Gelbaum, Expansions in Banach spaces, Duke Math. J., **17** (1950), 187—196.
7. В. Ф. Гапошкин, О базисах суммирования, Научные доклады высшей школы, т. **2** (1959), 24—27.
8. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, Москва, ИЛ, 1959.
9. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, ИЛ, 1954.