МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 33, № 3 (1983)

О СТРОГО НОРМИРОВАННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА l_1

М. И. Кадец, В. П. Фонф

В этой заметке мы будем рассматривать вещественное банахово пространство c_0 и сопряженное к нему l_1. Канонический базис в l_1 обозначим $\{e_n\}_1^\infty$, так что каждый элемент $x \in l_1$ получит единственное разложение $x = \sum a_n e_n$, $\| x \| = \sum | a_n |$. Линденштрауссу [1] принадлежит следующее замечание: если в l_1 взять два элемента $x = \sum a_n e_n$ и $y = \sum b_n e_n$ так, что отношения a_n/b_n плотно заполнят всю числовую ось, то двумерное подпространство, натянутое на эти элементы, будет строго нормированным. Цель настоящей заметки — показать, что в l_1 есть бесконечномерное строго нормированное подпространство, замкнутое в слабой * топологии. Отсюда в частности следует, что c_0 обладает бесконечномерным гладким фактор-пространством. Далее мы покажем, что каждое строго нормированное подпространство в l_1 обладает более сильным свойством выпуклости — является MLUR пространством.

Введем необходимые определения. Банахово пространство X называется строго нормированным, если его единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков. X называется симметрично локально равномерно выпуклым (обозначение $X \in$ MLUR), если из условий $\lim \| x \pm z_n \| = \| x \|$, $x \in S(X)$, $z_n \in X$, следует, что $\lim \| z_n \| = 0$. X называется локально равномерно выпуклым (обозначение $X \in$ LUR), если из условий $\lim \| x + x_n \| = 2$;

$x,\ x_n \in S(X)$, следует, что $\lim \| x_n - x \| = 0$. Свойство MLUR было введено Андерсоном [2]. По поводу его связей с другими свойствами выпуклости см. [3—5]. Введенные понятия можно «локализовать». Точка x на единичной сфере называется крайней точкой ($x \in \operatorname{ext} S(X)$), если она не является серединой отрезка, целиком лежащего на сфере, она же называется MLUR точкой, если из условий $\lim \| x \pm z_n \| = 1$ следует, что $\lim \| z_n \| = 0$. Наконец, банахово пространство называется гладким, если в каждой точке единичной сферы существует только одна опорная гиперплоскость. По поводу эквивалентных определений введенных понятий, соотношений двойственности и др. см. [6].

ЛЕММА. *Подпространство E банахова пространства l_1 будет строго нормированным в том и только том случае, если для любой пары линейно независимых элементов $x,\ y \in E$ найдется индекс m такой, что $a_m \cdot b_m < 0$, ($x = \sum a_m e_m$, $y = \sum b_m e_m$).*

Доказательство. Нам надлежит сравнивать числа

$$\| x + y \| = \sum | a_n + b_n |, \quad \| x \| = \sum | a_n |, \quad \| y \| = \sum | b_n |.$$

Ясно, что из неравенства $\| x + y \| < \| x \| + \| y \|$ следует, что для хотя бы одного m $a_m \cdot b_m < 0$. Обратно, если $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$, то для любого n $a_n \cdot b_n > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *В l_1 существует бесконечномерное строго нормированное подпространство, замкнутое в слабой* топологии.*

Доказательство. Занумеруем все отличные от нуля вещественные рациональные числа так, чтобы для полученной последовательности $\{r_n\}$ сходился ряд $\sum 2^{-n} | r_n | = A$. Разобьем натуральный ряд $\mathbf{N}$ на бесконечное число попарно не пересекающихся бесконечных подмножеств N_{jk} ($j,\ k = 1, 2, \ldots$) и определим сюръекцию $F\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ так, чтобы сужение F на каждое множество N_{jk} было биекцией его на $\mathbf{N}$. Положим

$$u_{jk} = \sum\nolimits_{m \in N_{jk}} 2^{-F(m)} e_m; \quad v_{jk} = \sum\nolimits_{m \in N_{jk}} 2^{-F(m)} r_{F(m)} e_m. \qquad (1)$$

Легко видеть, что для любого набора чисел λ_{jk}

$$\Big\| \sum\nolimits_{j,k} \lambda_{jk} u_{jk} \Big\| = \sum\nolimits_{j,k} | \lambda_{jk} |, \quad \Big\| \sum\nolimits_{j,k} \lambda_{jk} v_{jk} \Big\| = A \sum\nolimits_{j,k} | \lambda_{jk} |.$$

Пусть теперь

$$g_j = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u_{jk} + \frac{\theta}{j-1} \sum\nolimits_{i=1}^{j-1} v_{j-i,\, i}$$
$$\left(\theta = \frac{1}{3A}, \quad j = 1, 2, \ldots \right). \qquad (2)$$

Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{supp} g_j \cap \operatorname{supp} g_n = N_{j,\, n-j} \quad (j < n), \qquad (3)$$

где через $\operatorname{supp} x$ мы обозначаем множество тех индексов, для которых коэффициенты в каноническом разложении x отличны от нуля, и что

$$\sum\nolimits_n a_n g_n = \sum\nolimits_n \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k} a_n u_{nk} + \frac{\theta}{n+k-1} a_{n+k} v_{nk} \right).$$

Оценим снизу норму элемента $\sum a_n g_n$:

$$\Big\| \sum a_n g_n \Big\| = \sum\nolimits_n \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \Big\| 2^{-k} a_n u_{nk} + \frac{\theta}{n+k-1} a_{n+k} v_{nk} \Big\| \geqslant$$
$$\geqslant \sum\nolimits_n \Big\| 2^{-1} a_n u_{n1} + \frac{\theta}{n} a_{n+1} v_{n1} \Big\| \geqslant$$
$$\geqslant \sum\nolimits_n \left(\| 2^{-1} a_n u_{n1} \| - \Big\| \frac{\theta}{n} a_{n+1} v_{n1} \Big\| \right) \geqslant$$
$$\geqslant (2^{-1} - \theta A) \sum\nolimits_n | a_n | = \frac{1}{6} \sum | a_n |.$$

Получим теперь оценку сверху для $\| \sum a_n g_n \|$:

$$\Big\| \sum a_n g_n \Big\| \leqslant \sum | a_n | \, \| g_n \| \leqslant (1 + \theta A) \sum | a_n | = (4/3) \sum | a_n |.$$

Таким образом, $\{g_n\}_1^{\infty}$ — базисная последовательность, эквивалентная естественному базису пространства l_1. Пусть E — подпространство, натянутое системой $\{g_n\}_1^{\infty}$. Возьмем два линейно независимых вектора $x = \sum a_i g_i$, $y = \sum b_i g_i$ из E. В силу их линейной независимости можно указать два индекса $p < q$, для которых

$$a_p b_q - a_q b_p \neq 0. \qquad (4)$$

Из разложений элементов x и y по каноническому базису выделим те слагаемые, индексы которых принадлежат множеству $N_{p,q-p}$. Согласно (2) и (3) это будут элементы

$$a_p 2^{-(q-p)} u_{p,\,q-p} + a_q \frac{\theta}{q-1} v_{p,\,q-p},$$
$$b_p 2^{-(q-p)} u_{p,\,q-p} + b_q \frac{\theta}{q-1} v_{p,\,q-p},$$

или окончательно, согласно (1),

$$\sum\nolimits_{n\in N_{p,\,q-p}} \left(a_p 2^{-(q-p)} + a_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(n)}\right) 2^{-F(n)} e_n,$$
$$\sum\nolimits_{n\in N_{p,\,q-p}} \left(b_p 2^{-(q-p)} + b_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(n)}\right) 2^{-F(n)} e_n.$$

В силу условия (4) и плотности на всей оси множества $\{r_{F(n)},\ n \in N_{p,\,q-p}\}$ найдется индекс $m \in N_{p,\,q-p}$, такой, что

$$\left(a_p 2^{-(q-p)} + a_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(m)}\right) \cdot \left(b_p 2^{-(q-p)} + b_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(m)}\right) < 0.$$

Значит, согласно лемме 1, E — строго нормированное пространство. Покажем теперь, что E слабо * замкнуто в l_1. Из построения системы $\{g_n\}$ непосредственно следует, что последовательность g_n слабо * сходится к нулю. Рассмотрим слабо * замкнутую выпуклую оболочку K множества $G = \{\pm g_n\}_1^\infty$. Так как крайние точки множества K могут содержаться лишь среди $\{\pm g_n\}$ и слабо * предельных точек G (Мильмановское «обращение» теоремы Крейна — Мильмана (см. [7, стр. 16])), то $\operatorname{ext} K = G$. Значит, по теореме Шоке

$$K = \{\textstyle\sum_1^\infty c_n g_n\colon \sum |c_n| \leqslant 1\}.$$

Так как система $\{g_n\}$ эквивалентна каноническому базису l_1, то K содержит некоторый шар подпространства E. Согласно одному следствию теоремы Крейна—Шмульяна [8, стр. 465, следствие 8] E слабо* замкнуто.

С л е д с т в и е. *В пространстве c_0 есть подпространство H такое, что фактор-пространство c_0/H гладко.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно взять $H = E_\perp$ — аннулятор E в c_0. Тогда $(c_0/H)^* = E$, и гладкость c_0/H следует из строгой нормированности E.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X — подпространство пространства l_1. Тогда каждая крайняя точка единичной сферы X*

является ее MLUR*-точкой. В частности, если X — строго нормированное подпространство, то $X \in$ MLUR.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть некоторая точка $x \in \operatorname{ext} S(X)$ не является MLUR-точкой. Это означает, что в X существуют последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, такие, что

$$\inf_n \|u_n - v_n\| > 0, \quad \lim \|u_n\| = \lim \|v_n\| = 1;$$
$$x = (u_n + v_n)/2 \quad (n = 1, 2, \ldots);$$
$$u_n = \sum p_i^{(n)} e_i, \quad v_n = \sum q_i^{(n)} e_i, \quad x = \sum a_i e_i.$$

Так как $x \in \operatorname{ext} S(X)$, то легко видеть, что ни из последовательности $\{u_n\}$, ни из последовательности $\{v_n\}$ нельзя выделить сходящейся по норме подпоследовательности. Откуда, воспользовавшись известным критерием компактности в пространстве с базисом, получаем, что существуют подпоследовательность номеров $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и число $\delta > 0$ такие, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\textstyle\sum_{i=k+1}^\infty |p_i^{(n_k)}| > \delta, \quad \sum_{i=k+1}^\infty |q_i^{(n_k)}| > \delta.$$

Выберем номер k_0 настолько большим, чтобы для всех $k > k_0$ имело место

$$\|u_{n_k}\| \leqslant 1 + \delta/2, \quad \|v_{n_k}\| \leqslant 1 + \delta/2.$$

Откуда

$$\textstyle\sum_{i=1}^k |p_i^{(n_k)}| \leqslant 1 - \delta/2, \quad \sum_{i=1}^k |q_i^{(n_k)}| \leqslant 1 - \delta/2 \qquad (k = k_0 + 1, \ldots). \quad (5)$$

Но для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$(1/2) \textstyle\sum_{i=1}^k |p_i^{(n_k)} + q_i^{(n_k)}| = \sum_{i=1}^k |a_i|,$$

и, значит, $\lim\limits_k (1/2) \sum_{i=1}^k |p_i^{(n_k)} + q_i^{(n_k)}| = 1$, так как $\|x\| = 1$.

Последнее утверждение противоречит (5). Теорема доказана.

Заметим еще, что никакое бесконечномерное подпространство X пространства l_1 не является локально равномерно выпуклым. В самом деле в X можно выделить «почти дизъюнктную» нормированную последовательность

$\{x_n\}_1^\infty$, такую, что

$$\lim_n \| x_1 \pm x_n \| = \lim_n (\| x_1 \| + \| x_n \|) = 2,$$

что противоречит определению LUR пространства.

Харьковский институт инженеров
коммунального строительства
Всесоюзное научно-производственное
объединение «Союзтурбогаз»

Поступило
10.IV.1981

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Lindenstrauss J., On the extension of operators with a finite-dimensional range, Illinois J. Math., 8 (1964), 488—499.

[2] Anderson K. W., Midpoint local uniform convexity and other geometric properties of Banach spaces, Dissertation, Univ. of Illinois, 1960.

[3] Smith M. A., Some examples concerning rotundity in Banach spaces, Math. Ann., **233** (1978), 155—161.

[4] Smith M. A., Turett B., Rotundity in Lebesgue — Bochner function spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 257 (1980), 105—118.

[5] Кадец М. И., О связи между некоторыми свойствами выпуклости единичного шара пространства Банаха, Функц. анализ и его прилож., **16**, № 3 (1982), 58—60.

[6] Дистель Д., Геометрия банаховых пространств. Избранные главы, Киев («Высшая школа») 1980.

[7] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, М., «Мир», 1968.

[8] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория М., ИЛ, 1962.