ISSN 0037-4474

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ТОМ XXIII 1 1982

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXIII, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1982

УДК 513.88

Б. В. ГОДУН, М. И. КАДЕЦ

О НОРМИРУЮЩИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ, БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ И ПРЕДСОПРЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Подпространство Г сопряженного X^* к банахову пространству X называется *нормирующим*, если его характеристика Диксмье

$$r(\Gamma) = \inf\left\{\left\{\sup\frac{|f(x)|}{\|f\|\cdot\|x\|} : f \in \Gamma\right\} : x \in X\right\}$$

строго больше нуля. Характеристика подпространства Г может быть вычислена и по следующей формуле [1]:

$$r(\Gamma) = \inf\left\{\frac{\|F - x\|}{\|x\|} : x \in X,\ F \in \Gamma^{\perp}\right\} = \frac{1}{\|P_\Gamma\|},$$

где P_Γ — проектор из $\pi(X) \oplus \Gamma^\perp$ на $\pi(X)$, параллельно $\Gamma^\perp$ — аннулятору Г в пространстве X^{**} (π — естественное вложение X в X^{**}). Для подмножеств $U \subset X$, $V \subset X^*$ определим характеристику V относительно U:

$$r(V, U) = \inf\left\{\sup\left\{\frac{|v(u)|}{\|v\|\cdot\|u\|} : v \in V\right\} : u \in U\right\}.$$

В случае, когда U и V — подпространства в X и X^* соответственно, то $r(V, U) = \|P\|^{-1}$, где P — проектор из $U \oplus V_\perp$ на U, параллельно $V_\perp$ — аннулятору V в пространстве X [2].

Как показали Д. ван Дульст и И. Зингер [3], если Г — сепарабельное подпространство X^*, то на X существует такая эквивалентная норма, что в новой норме характеристика каждого подпространства, не содержащего Г, будет строго меньше единицы. Мы покажем, что эквивалентная норма на X с таким свойством существует и для некоторых несепарабельных подпространств $\Gamma \subset X^*$.

Напомним, что система элементов $\{x_i\}_{i\in I}$ банахова пространства X называется минимальной, если существует такая система линейных функционалов $\{x_i^*\}_{i\in I} \subset X^*$ (называется *сопряженной* к исходной системе), что $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$. Минимальную систему вместе со своей сопряженной $\{x_i, x^{i*}\}_{i\ni I}$ принято называть *биортогональной системой*. Биортогональная система называется ограниченной, если $\sup\|x_i\|\cdot\|x_i^*\| < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $\{x_i, x_i^*\}_{i\in I}$ — ограниченная биортогональная система в банаховом пространстве X и $\Gamma = [x_i^*]$. Тогда на X существует такая эквивалентная норма, что в новой норме для каждого подпространства $G \subset X^*$, не содержащего Г, $r(G, \{x_i\}_{i\in I}) < 1$.*

Доказательство. Будем считать, что $\|x_i\|_0 = 1$ $(i \in I)$ и $\sup\|x_i^*\|_0 \leqslant C < \infty$, где $\|\cdot\|_0$ — исходная норма на X. Введем систему проекторов, связанную с системой $\{x_i, x_i^*\}_{i\in I}$:

$$P_i(x) = x_i^*(x)\,x_i,\quad Q_i(x) = x - P_i(x)\quad (x \in X).$$

Очевидно, что $\|P_i\|_0 = \|P_i^*\|_0 = \|x_i\|\cdot\|x_i^*\| \leqslant C$. Введем на X новую норму $\|\cdot\|$, полагая для каждого $x \in X$

$$\|x\| = \max\left\{\frac{C}{C+1}\|x\|_0,\ \sup_{i\in I}\|P_i(x)\|_0\right\}.$$

Ясно, что норма $\|\cdot\|$ эквивалентна исходной:

$$\frac{C}{C+1}\|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant C\cdot\|x\|_0.$$

Лемма 1. *Для любого* $i \in I$, $\|x_i\| = \|x_i^*\| = \|P_i\| = \|P_i^*\| = 1$.

Доказательство. Так как $\|x_i\|_0 = 1$, то $\|x_i\| = \max\{C/(C+1),\ 1\} = 1$. Подсчитаем теперь $\|x_i^*\|$:

$$\|x_i^*\| \leqslant \sup\left\{\frac{|(x_i^*, x)|}{\|x\|} : x = x_i + y,\ P_i(y) = 0\right\} = \sup\left\{\frac{|(x_i^*, x_i+y)|}{\|x_i+y\|} : P_i(y) = 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{\frac{1 + |(x_i^*, y)|}{\|x_i+y\|} : P_i(y) = 0\right\} = \sup\left\{\frac{1}{\|x_i+y\|} : P_i(y) = 0\right\}.$$

Но если $P_i(y) = 0$, то $\|x_i + y\| \geqslant \|P_i(x_i+y)\|_0 = \|x_i\|_0 = 1$. Значит, $\|x_i^*\| \leqslant 1$. С другой стороны, $\|x_i^*\| \geqslant |(x_i^*, x_i)|/\|x_i\| = 1$. Таким образом, $\|x_i\| = \|x_i^*\| = 1$ и, значит, $\|P_i\| = \|P_i^*\| = \|x_i\|\cdot\|x_i^*\| = 1$.

Лемма 2. *Если для некоторого* $i \in I$ *и* $x \in X$ $P_i(x) = x_i$ *и* $\|Q_i(x)\| \leqslant 1/(C+1)$, *то* $\|x\| = 1$.

Доказательство. Так как $P_i(x) = x_i$, то элемент x можно представить в виде $x = x_i + Q_i(x)$. Тогда

$$\|x\| = \max\left\{\frac{C}{C+1}\|x_i + Q_i(x)\|_0,\ \sup_j\|P_j(x_i) + P_j\cdot Q_i(x)\|_0\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{C}{C+1}(1 + \|Q_i(x)\|_0),\ \|P_i(x)\|_0,\ \sup_{j\neq i}\|P_jQ_i(x)\|_0\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{C}{C+1}\left(1 + \frac{C+1}{C}\|Q_i(x)\|\right),\ 1,\ C\cdot\frac{C+1}{C}\|Q_i(x)\|\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{C}{C+1} + \|Q_i(x)\|,\ 1,\ (C+1)\|Q_i(x)\|\right\} \leqslant 1.$$

С другой стороны, $\|x\| \geqslant \|P_i(x)\|_0 = \|x_i\|_0 = 1$.

Лемма 3. *Для любого* $i \in I$ *и каждого* $x^* \in X$

$$\|P_i^*(x^*)\| + \frac{1}{2(C+1)}\|Q_i^*(x^*)\| \leqslant \|x^*\|.$$

Доказательство. Зафиксируем $i \in I$; требуемое неравенство достаточно установить лишь для таких $x^* \in X^*$, что $|x^*(x_i)| > 0$. Используя леммы 1, 2, получим $\|x^*\| = \sup\{|(x^*, x)| : \|x\| \leqslant 1\} \geqslant \sup\{|(x^*, x)| : P_i(x) = x_i, \|Q_i(x)\| \leqslant 1/(C+1)\} \geqslant |(x^*, x_i)| + \sup\{|(x^*, Q_i(x)| : \|Q_i(x)\| \leqslant 1/(C+1)\} \geqslant \|P_i^*(x^*)\| + \sup\{|Q_i^*(x^*), x)| : \|x\| \leqslant 1/2(C+1)\} \geqslant \|P_i^*(x^*)\| + \frac{1}{2(C+1)}\|Q_i^*(x^*)\|$.

Лемма 4. *В норме* $\|\cdot\|$ *каждый элемент* x_i^* *является строго выставленной точкой единичного шара пространства* X^*, *т. е. если*

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*,\ \|f_n\| = 1\ (n = 1, 2\ldots),\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_i) = 1, \qquad (*)$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - x_i^*\| = 0$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (*). Тогда, применяя лемму 3, получим:

$$\|f_n - x_i^*\| \leqslant \|P_i^*(f_n) - x_i^*\| + \|Q_i^*(f_n)\| = \|f_n(x_i)x_i^* - x_i^*\| +$$
$$+ \|Q_i^*(f_n)\| \leqslant |f_n(x_i) - 1| \cdot \|x_i^*\| + 2(C+1)\left(\|f_n\| - \|P_i^*(f_n)\|\right) =$$
$$= |f_n(x_i) - 1| + 2(C+1)(1 - |f_n(x_i)|) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть G — такое подпространство X^*, что $r(G, \{x_i\}_{i\in I}) = 1$. Для произвольного $i \in I$ найдется такая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$, $\|f_n\| = 1$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_i) = \|x_i\| = 1$. Согласно лемме 4 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - x_i^*\| = 0$, т. е. $x_i^* \in G$. Таким образом, пространство G содержит все элементы x_i^* $(i \in I)$ и, значит, содержит порожденное ими подпространство Г.

Непосредственно из доказанной теоремы получаем

Следствие 1. *Пусть* $\{x_i, x_i^*\}_{i\in I}$ — *ограниченная биортогональная система в банаховом пространстве* X *и* $\Gamma = [x_i^*]$. *Тогда на* X *существует такая эквивалентная норма, что в новой норме для каждого подпространства* $G \subset X^*$, *не содержащего* Г, $r(G) < 1$.

Следствие 2. *Пусть* $\{x_i, x_i^*\}_{i\in I}$ — *ограниченная биортогональная натягивающая система в банаховом пространстве* X (*т. е.* $[x_i^*] = X^*$). *Тогда на* X *существует такая эквивалентная норма, что в новой норме* $r(G) < 1$ *для каждого подпространства* $G \subset X^*$.

Пусть $X = c_0(S)$; тогда $X^* = l_1(S)$ и $X^{**} = m(S)$. Обозначим через π_0 естественное вложение X в X^{**} и π_1 — естественное вложение X^* в X^{***}.

Следствие 3. *Пусть* $Y = m(S)$ *и* G — *такое подпространство* Y^*, *что* $r(G, \pi_0(c_0(S))) = 1$. *Тогда* G *содержит* $\pi_1(l_1(S))$.

Действительно, если $\{x_s\}_{s\in S}$ — естественный базис пространства $c_0(S)$, то сопряженная система $\{x_1^*\}_{s\in S}$ — естественный базис пространства $l_1(S)$. Значит $\{\pi_0(x_s), \pi_1(x_s^*)\}_{s\in S}$ — ограниченная биортогональная система в Y и $[\pi_1(x_s^*)] = \pi_1(l_1(S))$. При этом эквивалентная норма на Y, построенная нами в теореме 1, с точностью до числового множителя совпадает с исходной нормой на $Y: \|x\|_0 = \sup\{|x(_s)| : {}_s \in S\} = \sup\{|(\pi_1(x_s^*), x)| : s \in S\}$, $(x \in Y)$.

Следствие 4. *Пусть* Y — *произвольное подпространство сепарабельного банахова пространства* X. *Тогда на* X *существует такая эквивалентная норма* $\|\cdot\|$, *что для каждого* $x \in X \backslash Y$

$$\sup\left\{\frac{\|y\|}{\|\lambda x + y\|} : y \in Y,\ \lambda \in R\right\} > 1$$

(т. е. норма проектора $P: [x] \oplus Y \to Y$ параллельно $[x]$ строго больше единицы).

Доказательство. Как известно [4], пространство Y имеет полную минимальную ограниченную систему $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Согласно одному результату И. Зингера [5], существует такая сопряженная к $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ система $\{y_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$, что $\sup\|y_i\| \cdot \|y_i^*\| < \infty$ и $[y_i^*]_{\perp} \subset Y$. Введем на X эквивалентную норму, как в теореме 1 (по системе $\{y_i, y_i^*\}_{i=1}^{\infty}$). Пусть для некоторого $x \notin Y$

$$\sup\left\{\frac{\|y\|}{\|\lambda x + y\|} : y \in Y,\ \lambda \in R\right\} = \|P\| = 1.$$

Обозначим $G=[x]^{\perp}$. Тогда, согласно теореме 1, $[y_i^*]\subset G$ и, значит, $G_{\perp}\subset[y_i^*]_{\perp}=Y$. Но $G_{\perp}=([x]_{\perp})^{\perp}=[x]$, т. е. $x\in Y$, что противоречит предположению.

Говорят, что банахово пространство X является *единственным с точностью до изометрии предсопряженным к своему сопряженному* X^*, если каждое банахово пространство Y такое, что Y^* изометрично X^*, изометрично X. В этом случае также говорят, что пространство X^* имеет единственное с точностью до изометрии предсопряженное. Известная теорема А. Гротендика [6] утверждает, что сопряженные пространства непрерывных функций на бикомпакте имеют единственное с точностью до изометрии предсопряженное. Некоторые подпространства и фактор-пространства функциональных пространств являются единственными предсопряженными к своим сопряженным пространствам [7, 8]. С другой стороны, пространство l_1 имеет несчетное семейство попарно не изоморфных предсопряженных пространств [9].

Теорема 2. *Пусть банахово пространство X имеет полную биортогональную ограниченную систему $\{x_i,x_i^*\}_{i\in I}$. Тогда на X существует такая эквивалентная норма, что в новой норме пространство X будет единственным с точностью до изометрии предсопряженным к своему сопряженному.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что $\|x_i^*\|_0=1$ и $\|x_i\|\leqslant C<\infty$, где $\|\cdot\|_0$ — исходная норма на X. Введем на пространстве X^* новую норму $\|\cdot\|$, полагая для каждого $x^*\in X^*$

$$\|x^*\|=\max\left\{\frac{C}{C+1}\|x^*\|_0,\ \sup_i\|P_i^*(x^*)\|_0\right\}.$$

Ясно, что норма $\|\cdot\|$ эквивалентна исходной норме на X^*. Нетрудно проверить, что единичный шар пространства $(X^*,\|\cdot\|)$ замкнут в топологии $\sigma(X^*,X)$. Значит, пространство $(X^*,\|\cdot\|)$ является сопряженным к пространству $(X,\|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ — некоторая эквивалентная исходной норма на X. Пусть Y — такое банахово пространство, что Y^* изометрично $(X^*,\|\cdot\|)$. Обозначим через π_X естественное вложение X в X^{**} и π_Y — естественное вложение Y в X^{**} (мы отождествляем пространства X^* и Y^*). Поскольку Y является предсопряженным к X^*, то $r(\pi_Y(Y),X^*)=1$, и согласно следствию 1 $\pi_X(X)\subseteq\pi_Y(Y)$. Покажем, что в действительности имеет место равенство $\pi_X(X)=\pi_Y(Y)$ — это и будет означать, что пространства X и Y изометричны. Поскольку X является предсопряженным к X^*, то $X^{***}=X^*\oplus(\pi_X(X))^{\perp}$. Если $\pi_X(X)\subset\pi_Y(Y)$, то $(\pi_Y(Y))^{\perp}\subset\subset(\pi_X(X))^{\perp}$ и, значит, $X^*\oplus(\pi_Y(Y))^{\perp}\neq X^{***}$, т. е. $Y^*=X^{***}/(\pi_Y(Y))^{\perp}\neq\neq X^*$ — это противоречие завершает доказательство теоремы.

Харьков,
Харьковский институт инженеров коммунального строительства

Статья поступила 17 марта 1980 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Singer I.* Weak* bases in conjugate Bahach spaces. II.— Rev. rom. math. pure et appl., 1963, v. 8, № 4, p. 575—585.
2. *Davis W. J., Dean D. W., Lin B. L.* Bibasic sequences and norming basic sequences.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 176, № 2, p. 89—102.
3. *Dulst van D., Singer I.* On Kadec — Klee norms on Banach spaces.— Studia Math., 1975, v. 54, № 1, p. 205—211.
4. *Pelczynski A.* All separable Banach spaces admit for any ε>0 fundamental total

and bounded by $1+\varepsilon$ biorthogonal sequences.— Studia Math., 1976, v. 55, № 3, p. 295—304.

5. *Singer I.* On biorthogonal systems and total sequences of functionals. II.— Math. Ann., 1973, v. 201, p. 1—8.
6. *Grotendieck A.* Une caracterisation vectorible-metrique des espaces L^1.— Canad. J. Math., 1955, v. 7, № 4, p. 552—561.
7. *Ito T.* On Banach spaces with unique isometric preduals.— Michigan Math. J., 1977, v. 24, № 3, p. 321—324.
8. *Browh L., Ito T.* Classes of Banach spaces with unique isometric preduals.— Pacif. J. Math., 1980, v. 90, № 2, p. 261—283.
9. *Bessaga C., Pelczynski A.* Space of continuous functions. IV.— Studia Math., 1960, v. 19, № 2, p. 53—60.