УДК 513.83:513.88

ГЕОМЕТРИЯ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. И. Кадец

Последние годы ознаменовались бурным развитием теории нормированных пространств. Возникли и обособились новые разделы этой теории, обогатилась новыми существенными фактами теория классических банаховых пространств C и L_p. Получен ряд замечательных результатов, «закрывающих» многие вопросы, поставленные еще при возникновении функционального анализа.

Возрастание интереса к различным вопросам теории нормированных пространств сопровождалось опубликованием значительного числа специализированных монографий ([31, 108, 136, 138] и др.) и обзоров ([20, 26, 28, 33, 102] и др.).

Настоящий обзор опирается в основном на литературу, прореферированную в РЖ Математика в 1970—1974 гг. Материал, собранный в обзоре, освещает круг вопросов, которые можно охарактеризовать как «конечномерность и ее отражение в бесконечномерном». Обзор разделен на три параграфа: конечномерные нормированные пространства, финитная представимость, базисы в пространствах Банаха.

§ 1. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Наиболее простым объектом функционального анализа можно считать конечномерные нормированные пространства. Многие трудные вопросы теории бесконечномерных нормированных пространств оказываются в случае пространств конечномерных либо тривиальными, либо бессодержательными. Действительно, все конечномерные пространства рефлексивны (и даже суперрефлексивны); все они имеют базис, являющийся безусловным; любые два из них изоморфны в том и только в том случае, если имеют одинаковую размерность и т. д. Однако почти любой вопрос теории бесконечномерных пространств может получить содержательную трактовку в рамках теории конечномерных пространств, если удачно сформулировать количественный прообраз этого вопроса. Так, например, вопрос о дополняемых подпространствах банахова пространства в конечномерной трактовке сводится к вычислению или оценке проекционных констант, вопросы изоморфной классификации банаховых пространств — к вычислению расстояний между ними, теория абсолютно суммирующих и ядерных операторов — к вычислению соответствующих норм тождественного оператора, действующего в данном пространстве.

Вычисление количественных характеристик конечномерных пространств требует привлечения разнообразных методов: некоторых приемов оптимального программирования, теоретико-групповых соображений, использования специальных неравенств и интегральных представлений и др.

1.1. Некоторые вспомогательные средства теории конечномерных пространств.

1.1.1. Базис Ауэрбаха. Так называется базис $\{e_k\}_1^n$ n-мерного нормированного пространства, удовлетворяющий следующему условию: для всех наборов коэффициентов $\{a_k\}_1^n$

$$\max|a_k| \leqslant \left\|\sum a_k e_k\right\| \leqslant \sum |a_k|.$$

Базис Ауэрбаха существует в любом n-мерном пространстве. С его помощью просто доказывается дополняемость каждого n-мерного подпространства в любом объемлющем пространстве. (см. [6], стр. 260).

1.1.2. Система Джона. Для любого n-мерного нормированного пространства X существует линейный обратимый оператор $T: X \to l_2^{(n)}$, обладающий следующими свойствами: $\|T^{-1}\| = 1$; существуют натуральное s $\left(n \leqslant s \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\right)$, элементы $\{y_r\}_1^s \subset l_2^{(n)}$ и положительные числа $\{\lambda_r\}_1^s$ такие, что $\|y_r\| = \|T^{-1}y_r\| = \|T^*y_r\| = 1$, и для любых $u, v \in l_2^{(n)}$ справедливо тождество

$$\sum \lambda_r (y_r, u)\cdot(y_r, v) = (u, v).$$

Системой Джона мы назовем систему элементов $x_r = T^{-1}y_r \in X$. линейных функционалов $f_r = T^*y_r \in X^*$ и чисел λ_r. Свойства этой системы $\{x_k, f_r, \lambda_r\}$ описываются следующими формулами

$$f(x) = \sum \lambda_r f_r(x) f(x_r) \quad (x \in X,\ f \in X^*);$$

$$\|x_r\| = \|f_r\| = 1; \qquad \sum \lambda_r = n;\ \lambda_r \leqslant 1;$$

$$\sum \lambda_r f^2(x_r) \leqslant \|f\|^2; \quad \sum \lambda_r f_r^2(x) \leqslant n\|x\|^2.$$

Система Джона применяется при вычислении многих характеристик конечномерных нормированных пространств. Первоначально она возникла в связи с задачей об эллипсоиде минимального объема, описанном вокруг данного тела (см. [21, 66]).

1.1.3. Неравенство Хинчина. Пусть $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — произвольный набор действительных чисел. Образуем величину

$$K(x, p)=\left[2^{-n}\sum_{\alpha}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right|^p\right]^{1/p} \quad (1\leqslant p\leqslant\infty).$$

где внешняя сумма берется по всем наборам коэффициентов $\alpha_j=\pm 1$. Эта величина очевидным образом трактуется в рамках теории вероятностей. С точки зрения теории нормированных пространств это норма в n-мерном линейном пространстве. Неравенство Хинчина имеет вид:

$$K_p^{-1}\sqrt{\Sigma x_j^2}\leqslant K(x, p)\leqslant \overline{K}_p\sqrt{\Sigma x_j^2}.$$

О наилучших значениях коэффициентов K_p и $\overline{K}_p$ известно следующее: $\sqrt{2}\leqslant K_1<\frac{\pi}{2}$; $K_2=\overline{K}_2=1$; $K_p=1$ при $p\geqslant 2$. $\overline{K}_p=1$ при $p\leqslant 2$. Особенно интересным представляется вычисление точного значения K_1. Одно из применений неравенства Хинчина — вычисление расстояний между пространствами $l_p^{(n)}$. *)

1.1.4. Неравенство Гротендика. Пусть $A=(a_{ij})$ $(1\leqslant i\leqslant m,$ $1\leqslant j\leqslant n)$ — произвольная матрица с действительными элементами. Образуем величину

$$\|A\|=\sup_{t,\tau}\sum a_{ij}t_i\tau_j \quad (|t_i|\leqslant 1; \quad |\tau_j|\leqslant 1).$$

Неравенство Гротендика имеет вид

$$\sum a_{ij}(x_i, y_j)\leqslant K_G\cdot\|A\|,$$

где x_i и y_j — произвольные нормированные элементы действительного гильбертова пространства. Точное значение K_G (константа Гротендика) неизвестно. Установлено лишь неравенство $\pi/2\leqslant K_G\leqslant \operatorname{sh}\pi/2$. При $p=1$ неравенство Хинчина $K_1^{-1}\sqrt{\Sigma x_i^2}\leqslant$ $\leqslant K(x, 1)$ является частным случаем неравенства Гротендика. Оно получается, если в качестве матрицы A взять матрицу

$$A=(\alpha_{ij}x_j) \quad (1\leqslant i\leqslant 2^n, \quad 1\leqslant j\leqslant n),$$

строки которой представляют собой векторы $\{\pm x_1, \pm x_2, \ldots$ $\ldots, \pm x_n\}$; взятые со всевозможными наборами знаков ± 1. (См. [104, 108]).

* Недавно студент Варшавского университета Шарек (Szarek) доказал, что $K_1=\sqrt{2}$ (*примечание при корректуре*).

1.1.5. Теорема Дворецкого. Каково бы ни было натуральное n и $\varepsilon > 0$, найдется число $N = N(n, \varepsilon)$, обладающее следующим свойством. Каково бы ни было N-мерное нормированное пространство E, в нем найдется n-мерное подпространство X, являющееся «почти евклидовым» в том смысле, что $d(X, l_2^{(n)}) \leqslant 1 + \varepsilon$.

Для достаточно больших значений n справедлива оценка

$$N(n, \varepsilon) \leqslant \exp\left\{C \cdot \frac{\ln 1/\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot n\right\},$$

где C — абсолютная константа. Это неравенство в определенном смысле точно [27].

Из теоремы Дворецкого выводится следующее полезное предложение о почти ортогональных подпространствах.

1.1.6. Теорема [28]. Пусть E — бесконечномерное нормированное пространство; X — его конечномерное подпространство. Для любого натурального n и $\varepsilon > 0$ в E найдется n-мерное подпространство Y такое, что

$$\|x + y\| \geqslant (1 - \varepsilon) \cdot \max\{\|x\|, \|y\|\} \quad (x \in X, \ y \in Y).$$

1.2. Компакт Минковского $\mathfrak{M}_n$. Зафиксировав натуральное n, рассмотрим совокупность всех n-мерных нормированных пространств. Пусть X и Y — два из них. Хорошо известно, что между ними можно установить изоморфизм, т. е. линейное биективное и в обе стороны непрерывное соответствие. Мерой близости X и Y принято считать расстояние Банаха — Мазура

$$d(X, Y) = \inf \|T\| \cdot \|T^{-1}\|,$$

где T пробегает все изоморфизмы между X и Y. Логарифм дистанции является метрикой и превращает совокупность n-мерных нормированных пространств в метрический компакт $\mathfrak{M}_n$, который мы будем называть компактом Минковского, в связи с тем, что сами конечномерные нормированные пространства называют пространствами Минковского. Для компакта Минковского, как и для любого метрического компакта, возникают следующие естественные вопросы: вычислить диаметр и радиус

$$d(\mathfrak{M}_n) = \sup_{X, Y} d(X, Y); \quad r(\mathfrak{M}_n) = \inf_X \sup_Y d(X, Y),$$

вычислить ε-энтропию.

1.3. Расстояния между некоторыми пространствами Минковского.

1.3.1. Каково бы ни было пространство $X \in \mathfrak{M}_n$,

$$d(X, l_2^{(n)}) \leqslant \sqrt{n} \text{ (см. [7,21])},$$

причем эта оценка точна; знак равенства достигается, например, для $X=l_1^{(n)}$. Отсюда и из неравенства треугольника для любых X и Y из $\mathfrak{M}_n$ следует оценка

$$d(X, Y)\leqslant n.$$

Вопрос о точности этой оценки остается открытым; неизвестно даже, можно ли понизить показатель степени при n. Неизвестны оценки сверху для $d(X, l_1^{(n)})$ и $d(X, l_\infty^{(n)})$. Впрочем $\sup\limits_X d(X, l_1^{(n)})=\sup\limits_X d(X, l_\infty^{(n)})$ $(X\in\mathfrak{M}_n)$, поскольку $d(X, Y)=$ $=d(X^*, Y^*)$.

1.3.2. Для n-мерных координатных пространств $l_p^{(n)}$ известны следующие формулы [10]:

$$d(l_p^{(n)}, l_2^{(n)})=n^{|1/p-1/q|}(1\leqslant p,\ q\leqslant 2 \text{ или } 2\leqslant p,\ q\leqslant\infty),$$

$$d(l_p^{(n)}, l_q^{(n)})\asymp\max\{n^{1/p-1/2},\ n^{1/2-1/q}\}\quad(1\leqslant p\leqslant 2\leqslant q\leqslant\infty).$$

С использованием теории гауссовых мер были получены недавно оценки снизу для дистанций между некоторыми конечномерными подпространствами пространств Орлича.

1.3.3. Понятие расстояния Банаха—Мазура применимо и к бесконечномерным нормированным пространствам. Однако в этом случае может возникнуть несколько неожиданная ситуация: пространства X и Y не изометричны, а $d(X, Y)=1$. В этом случае пространства называются почти изометричными. Примеры почти изометричных банаховых пространств построены довольно давно, но насколько нам известно, нигде не публиковались. Приведем здесь без обоснования один такой пример. Занумеруем рациональные числа интервала $(1, \sqrt{2})$; обозначим их $\{t_n\}$; присоединив к ним какое-нибудь иррациональное число τ из того же интервала, получим новое множество $\{\tau_n\}$ $(\tau_1=\tau,$ $\tau_n=t_{n-1})$. В пространстве l_2 введем две эквивалентные нормы:

$$\|x\|_1=\max\{\|x\|;\ \sup_n t_n\cdot|a_n|\};\quad \|x\|_2=\max\{\|x\|;\ \sup_n \tau_n\cdot|a_n|\},$$

где $\|x\|$ — исходная норма l_2, $x=\sum a_ne_n$. Пространства $X_1=(l_2, \|\cdot\|_1)$ и $X_2=(l_2, \|\cdot\|_2)$ не изометричны, но $d(X_1, X_2)=1$.

1.4. Меры симметричности пространств Минковского.

1.4.1. Следующие понятия введены и исследованы в [11]. Пусть $B=\{e_i\}$ — базис в пространстве Минковского $X\in\mathfrak{M}_n$. Определим линейный оператор $g_\sigma\in L(X)$, действующий по правилу

$$g_\sigma\left(\sum\lambda_ie_i\right)=\sum\lambda_ie_{\sigma(i)},$$

где σ — некоторая перестановка отрезка натурального ряда $[1; n]$; пусть $G_\sigma(B)\subset L(X)$ — группа всех таких операторов.

Определим также оператор $g_\alpha \in L(X)$, действующий по правилу

$$g_\alpha\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \alpha_i \lambda_i e_i,$$

где $\{\alpha_i\}$ — некоторый набор чисел ± 1; пусть $G_\alpha(B) \subset L(X)$ — группа всех таких операторов. Диагональной, координатной и тотальной асимметриями базиса B назовем величины

$$\delta(B) = \sup\{\|g\| : g \in G_\sigma(B)\},$$

$$\varkappa(B) = \sup\{\|g\| : g \in G_\alpha(B)\},$$

$$\alpha(B) = \delta(B) \cdot \varkappa(B).$$

Диагональной, координатной и тотальной асимметриями пространства X назовем величины

$$\delta(X) = \inf \delta(B); \quad \varkappa(X) = \inf \varkappa(B); \quad \alpha(X) = \inf \alpha(B),$$

где нижняя грань берется по всем базисам пространства X.

В терминах асимметрий можно получить некоторые неравенства для дистанций, например,

$$d(X, l_1^{(n)}) \cdot d(X, l_\infty^{(n)}) \leqslant \frac{\varkappa(X)+1}{2} \cdot \alpha(X) \cdot n.$$

1.4.2. В [75] введены другие понятия, описывающие степень симметричности пространств Минковского. Константой асимметрии $s(X)$ называется нижняя грань чисел μ, обладающих следующим свойством: существует группа G обратимых линейных операторов в X такая, что каждый оператор, коммутирующий со всеми $g \in G$, имеет вид $\lambda \cdot i$ (i — тождественный оператор), и $\sup\{\|g\| : g \in G\} \leqslant \mu$. Ясно, что $s(X) \geqslant 1$.

1.4.3. Если $s(X) = 1$, то пространство называется достаточно симметричным. Константу асимметрии можно представить в таком виде:

$$s(X) = \inf\{d(X, Y) : s(Y) = 1\}.$$

Константы асимметрии связаны неравенством $s(X) \leqslant \alpha(X)$, причем существуют (даже двумерные) пространства, для которых $1 = s(X) \neq \alpha(X)$.

1.4.4. В [77] рассматривался вопрос о поведении при $n \to \infty$ константы асимметрии. Там указана последовательность пространств X_n ($\dim X_n = n$) такая, что

$$\alpha(X_n) \asymp s(X_n) \asymp n^{1/4},$$

и высказано предположение, что

$$s_n = \sup\{s(X) : X \in \mathfrak{M}_n\} = O(n^{1/4}).$$

1.5. Проекционные константы.

1.5.1. Пусть Z — произвольное пространство Банаха; X — его подпространство. Определим относительную проекционную константу

$$\lambda(X, Z) = \inf \|P\|,$$

где P пробегает все линейные операторы проектирования Z на X. Если таких проекторов нет (X не имеет дополнения в Z), то полагаем $\lambda(X, Z) = \infty$; впрочем, конечномерное подпространство всегда имеет дополнение.

1.5.2. Абсолютная проекционная константа пространства X определяется следующей формулой

$$\lambda(X) = \sup_{Z} \lambda(X, Z),$$

где Z пробегает все банаховы пространства, содержащие X в качестве подпространства. Если в качестве Z взять пространство $C(U^*)$ всех непрерывных функций, определенных на единичном шаре сопряженного пространства X^*, то получим равенство

$$\lambda(X) = \lambda(X, C(U^*)),$$

из которого выводится следующая формула для вычисления проекционной константы:

$$\lambda(X) = \inf_{\{f_r, x_r\}} \sup_{f} \sum_r \|f_r\| \cdot |f(x_r)|,$$

где верхняя грань берется по всем нормированным линейным функционалам $f \in X^*$, а нижняя грань — по всем конечным наборам $f_r \in X^*$ и $x_r \in X$ таким, что для любого $x \in X$

$$\sum f_r(x) x_r = x.$$

Проекционная константа — непрерывный функционал на компакте Минковского, что вытекает из неравенства

$$\lambda(X) \leqslant \lambda(Y) d(X, Y),$$

верного для любых конечномерных пространств одинаковой размерности.

1.5.3. Для некоторых пространств Минковского известны точные значения проекционной константы. Например, [26], [69]:

$$\lambda(l_1^{(n)}) = \frac{(2k-1)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}, \quad \left(k = \left[\frac{n+1}{2}\right]\right),$$

$$\lambda(l_2^{(n)}) = \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}},$$

$$\lambda(l_\infty^{(n)}) = 1; \ \lambda(X) > 1, \text{ если } d(X, l_\infty^{(n)}) > 1.$$

1.5.4. В связи с последними неравенствами возникает вопрос: существует ли (не зависящая от n) непрерывная монотонная функция $F(t)$ $(1 \leqslant t < \infty)$, $F(1)=1$ такая, что

$$d(X, l_\infty^{(n)}) \leqslant F(\lambda(X))$$

для всех конечномерных X?

Введем обозначение: $\lambda_n = \sup\{\lambda(X) : X \in \mathfrak{M}_n\}$. Грюнбаум ([7], стр 51) высказал предположение, что

$$\lambda_2 = \frac{4}{3}; \quad \lambda_3 = \frac{3}{2}; \quad \lambda_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \ (n \to \infty).$$

Последнее предположение оказалось неверным [32]:

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} \geqslant \left(2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{-1} > \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

1.5.5. В [21] с привлечением системы Джона было получено неравенство

$$\lambda(X) \leqslant \sqrt{n} \quad (X \in \mathfrak{M}_n).$$

В [34] указан класс n-мерных пространств, для которых знак $\leqslant$ может быть заменен на $<$. Однако остается открытым вопрос: можно ли для всех $X \in \mathfrak{M}_n$ ввести в правую часть неравенства коэффициент $K < 1$?

Отметим еще два предложения о проекционных константах подпространств в l_1.

1.5.6. Теорема [72]. Для любого n-мерного подпространства пространства l_1

$$\lambda(X) \geqslant K_G^{-1} \sqrt{n}.$$

1.5.7. Следствие. Для любого $X \in \mathfrak{M}_n$

$$\lambda(X) \cdot \lambda(X^*) \geqslant K_G^{-1} \sqrt{n}.$$

1.5.8. Теорема [32]. Пусть X и Y — n-мерные подпространства в l_1 и X изометрично Y. Тогда

$$\lambda(X, l_1) = \lambda(Y, l_1).$$

В работах [18, 34, 75] и др. к вычислению проекционных констант применялся теоретико-групповой подход. Он оказался успешным в применении к пространствам, имеющим достаточно богатую группу изометрий (в частности, к достаточно симметричным пространствам).

1.5.9. Отметим еще одно соотношение между расстояниями и относительными проекционными константами. Пусть E — бесконечномерное банахово пространство; для любого натурального n

$$\sup_X d\left(X, l_2^{(n)}\right) \leqslant \left(2 \sup_X \lambda(X, E)\right)^2,$$

где X в обеих частях неравенства пробегает все n-мерные подпространства в E. Неизвестно, можно ли в правой части неравенства устранить коэффициент 2. На это неравенство (доказываемое с применением теоремы Дворецкого) опирается доказательство теоремы Линденштрауса — Цафрири (см. [20]). Неясно, можно ли получить аналогичные неравенства, заменяя $l_2^{(n)}$ каким-либо $l_p^{(n)}$.

1.6. Абсолютно суммирующие и ядерные константы.

1.6.1. Для $1 \leqslant p < \infty$ назовем p-абсолютно суммирующей константой $\pi_p(X)$ пространства Минковского X выражение

$$\pi_p(X) = \sup_{x_i} \left[\sum \| x_i \|^p / \sup_f \sum | f(x_i) |^p\right]^{1/p},$$

где верхняя грань в знаменателе берется по всем нормированным линейным функционалам $f \in X^*$, а $\{x_i\}$ пробегает все конечные наборы векторов из X.

1.6.2. Назовем p-ядерной константой $\nu_p(X)$ выражение

$$\nu_p(X) = \inf \left\{\left(\sum \| f_i \|^p\right]^{1/p} \cdot \sup_f \left[\sum | f(x_i) |^{p'}\right]^{1/p'}\right\},$$

$$\left(\| f \| = 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right),$$

где нижняя грань берется по всем конечным наборам $\{f_i, x_i\}$ таким, что для любого $x \in X$

$$\sum f_i(x) x_i = x.$$

Иначе говоря, $\pi_p(E)$ ($\nu_p(E)$) есть p-абсолютно суммирующая (p-ядерная) норма единичного оператора, действующего в E.

1.6.3. Следующие соотношения получены в работах [36, 66]:

$$\lambda(X) \cdot \pi_1(X) \geqslant n; \quad \nu_1(X) = n; \quad \pi_2(X) = \nu_2(X) = \sqrt{n};$$

$$\sqrt{n} \leqslant \pi_p(X) \leqslant \nu_p(X) \leqslant \sqrt[p]{n}, \quad (1 \leqslant p \leqslant 2);$$

$$\sqrt[p]{n} \leqslant \pi_p(X) \leqslant \nu_p(X) \leqslant \sqrt{n} \quad (2 < p).$$

С привлечением константы асимметрии получаются такие неравенства:

$$\lambda(X) \cdot \pi_1(X) \leqslant n(s(X))^2; \quad n \leqslant \pi_p(X) \cdot \nu_{p'}(X) \leqslant n(s(X))^2.$$

1.7. Внутренняя геометрия единичной сферы.

1.7.1. Шеффер [130] обратил внимание на интересный круг вопросов, возникающих в связи с понятием внутренней метрики единичной сферы. Пусть X — нормированное пространство, S — его единичная сфера. Внутреннее расстояние $\rho(X, Y)$ между точками $x, y \in S$ определяется как нижняя грань длин спрямляемых кривых, соединяющих эти точки и целиком лежащих на сфере. С помощью внутреннего расстояния вводятся следующие числовые характеристики нормированного пространства.

1.7.2. Внутренний диаметр — верхняя грань расстояний между точками сферы:

$$D(X)=\sup_{x,y}\rho(x, y) \quad (x, y\in S).$$

1.7.3. Полупериметр — верхняя грань расстояний между точками-антиподами на сфере:

$$M(X)=\sup_{x}\rho(x, -x) \quad (x\in S).$$

1.7.4. Полуобхват — нижняя грань расстояний между точками-антиподами на сфере:

$$m(X)=\inf_{x}\rho(x, -x) \quad (x\in S).$$

1.7.5. Между введенными величинами установлены следующие связи: для любого нормированного пространства

$$2\leqslant m(X)\leqslant M(X)\leqslant D(X)\leqslant 4;$$

при этом существуют пространства, для которых $M<D$ [128]; если пространство трехмерно, то $M=D$.

Для двумерных пространств введенные величины совпадают:

$$3\leqslant m(X)=M(X)=D(X)\leqslant 4 \quad (X\in\mathfrak{M}_2);$$

при этом $m(X)=3$ в том и только в том случае, если единичная сфера — правильный шестиугольник; $D(X)=4$ в том и только том случае, если сфера — квадрат (т. е. $X=l_1^{(2)}=l_\infty^{(2)}$).

Для евклидова пространства любой размерности очевидно

$$m(E)=M(E)=D(E)=\pi.$$

Каждая из характеристик — непрерывный функционал на компакте Минковского:

$$|\Psi(X)-\Psi(Y)|\leqslant 6[d(X, Y)-1], \quad (X, Y\in\mathfrak{M}_n; \quad \Psi(X)=m(X) \text{ или } M(X) \text{ или } D(X)).$$

Введем обозначение

$$m^*(n)=\min_{X} m(X) \quad (X\in\mathfrak{M}_n);$$

оказывается [126], что

$$m^*(2n+1)=m^*(2n)=2+\frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Наконец, для верхней грани полуобхватов справедливо неравенство

$$\sup_x m(X) \leqslant \pi + \frac{K}{\sqrt{\log n}} \quad (X \in \mathfrak{M}_n; n=2,3,\ldots).$$

Понятия диаметра, периметра и обхвата применяются также и к изучению бесконечномерных нормированных пространств [131, 133, 134, 135].

§ 2. ФИНИТНАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ

2.1. Определения и некоторые факты. Многие свойства нормированного пространства обусловлены наличием или отсутствием в нем конечномерных подпространств определенного вида. Поэтому оказывается полезным понятие финитной (т. е. связанной с конечномерными подпространствами) представимости одного нормированного пространства в другом [90].

2.1.1. Определение. Пусть $\lambda > 1$. Нормированное пространство E называется λ-финитно представимым в нормированном пространстве X, если для каждого конечномерного подпространства $F \subset E$ найдется подпространство той же размерности $Y \subset X$ такое, что $d(F, Y) \leqslant \lambda$.

2.1.2. Определение. Пространство E называется финитно представимым в пространстве X, если оно λ-финитно представимо в X при любом $\lambda > 1$.

Многие известные факты теории нормированных пространств хорошо формулируются в терминах финитной представимости. Вот некоторые из них.

2.1.3. Пространство l_2 финитно представимо в каждом бесконечномерном банаховом пространстве (теорема Дворецкого).

2.1.4. Каждое нормированное пространство финитно представимо в c_0 (для каждого конечномерного подпространства найдется сколь угодно близкое к нему в смысле дистанции пространство, единичный шар которого — многогранник; последнее же изометрически вкладывается в c_0).

2.1.5. Каково бы ни было пространство X, второе сопряженное X^{**} финитно представимо в X (следствие принципа локальной рефлексивности [108]).

2.1.6. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, λ-финитно представимое в l_p; тогда X изоморфно некоторому подпространству $Y \subset L_p[0,1]$, причем $d(X, Y) \leqslant \lambda$ [104].

2.1.7. Пространство c_0 финитно представимо в квазирефлексивном пространстве Джеймса J_2 [71].

2.1.8. Недавно Б. С. Цирельсон [39] построил пример рефлексивного банахова пространства с безусловным базисом (обозначим его $Ц$) такого, что пространство c_0 финитно представимо в каждом его бесконечномерном подпространстве. Пространство Ц не содержит подпространств, изоморфных $l_p (1 \leqslant p < \infty)$ либо c_0 и, следовательно, опровергает «основную структурную гипотезу» ([28], стр. 134]) теории банаховых пространств.

2.1.9. В связи с примером Цирельсона возникает задача — охарактеризовать банаховы пространства, для которых «структурная гипотеза» все же верна. Сюда относятся, например, нерефлексивные пространства с безусловным базисом.

В терминах финитной представимости удается выделить различные важные классы банаховых пространств. Ниже мы рассмотрим некоторые из них.

2.2. Суперрефлексивность.

2.2.1. Определение [90]. Банахово пространство X называется суперрефлексивным, если никакое не рефлексивное банахово пространство E не финитно представимо в X.

2.2.2. Теорема [90]. Банахово пространство X суперрефлексивно в том и только в том случае, если никакое не рефлексивное пространство не λ-финитно представимо в X ни при каком $\lambda > 1$.

2.2.3. Теорема [90]. Суперрефлексивность инвариантна по отношению к изоморфизму. Банахово пространство X суперрефлексивно в том и только в том случае, если X^* суперрефлексивно. Все подпространства и факторпространства суперрефлексивного пространства суперрефлексивны.

Непосредственно из определения вытекает, что каждое суперрефлексивное пространство рефлексивно (обратное неверно); нетрудно показать, что, с другой стороны, каждое равномерно выпуклое пространство суперрефлексивно. Энфло установил следующую глубокую связь между суперрефлексивностью, равномерной выпуклостью и равномерной гладкостью.

2.2.4. Теорема [57]. Следующие утверждения эквивалентны. а) Банахово пространство X суперрефлексивно; б) X изоморфно равномерно выпуклому пространству; в) X изоморфно равномерно гладкому пространству; г) в X можно ввести эквивалентную норму, являющуюся одновременно равномерно выпуклой и равномерно гладкой.

Последнее утверждение является следствием теоремы Асплунда (см. [28]) о «смешанных» эквивалентных нормах. Поскольку равномерная выпуклость и равномерная гладкость характеризуются значениями соответствующих модулей выпуклости и гладкости $\delta(\varepsilon)$ и $\rho(\tau)$ (см. [28], стр. 76), было бы интересно попытаться придать теореме Энфло количественную трактовку. Вот первый существенный результат в этом направлении.

2.2.5. Теорема [125]. Если банахово пространство X суперрефлексивно, то оно изоморфно равномерно выпуклому пространству, модуль выпуклости которого удовлетворяет неравенству

$$\delta(\varepsilon) \geqslant C\varepsilon^p \text{ для некоторых } C > 0 \text{ и } p \geqslant 2.$$

2.2.6. Рассмотрим один удобный для применений критерий суперрефлексивности. Будем говорить, что банахово пространство обладает свойством (J), если для каждого целого положительного n и каждого $\rho \in (0,1)$ найдется набор нормированных элементов $\{x_i\}_1^n \subset X$ такой, что

$$\left\| -\sum_1^m x_i + \sum_{m+1}^n x_i \right\| \geqslant \rho \cdot n \ (m=1, 2, \ldots, n).$$

2.2.7. Теорема [92]. Банахово пространство суперрефлексивно в том и только том случае, если оно не обладает свойством (J).

Свойство (J) возникло в связи с понятием обхвата единичной сферы S банахова пространства. Так называется нижняя грань длин всех спрямляемых центрально симметричных кривых, лежащих на S. Обхват — одна из величин, введенных в [130] для описания внутренней геометрии единичной сферы. Несмотря на строго метрический характер определения обхвата, он в определенной мере оказывается инвариантным по отношению к изоморфизму.

2.2.8 Теорема [92]. Обхват сферы равен 4 в том и только том случае, если пространство не суперрефлексивно: в противном случае он строго больше, чем 4.

Суперрефлексивность допускает также характеризацию в терминах базисных последовательностей. Вот одно из относящихся сюда предложений.

2.2.9. Теорема [91]. Суперрефлексивность банахова пространства X равносильна следующему. Какова бы ни была нормированная базисная последовательность $\{e_k\} \in X$, найдутся показатели r и s $(1<s\leqslant r<\infty)$ и коэффициенты $0<A\leqslant B<\infty$ такие, что

$$A\left[\sum |a_k|^r\right]^{1/r} \leqslant \left\|\sum a_k e_k\right\| \leqslant B\left[\sum |a_k|^s\right]^{1/s}$$

для любых наборов коэффициентов $\{a_k\}$.

Напоминаем, что базисная последовательность — это последовательность элементов, являющаяся базисом в замыкании своей линейной оболочки.

2.3. B-выпуклость. В связи с некоторыми вопросами теории случайных величин, принимающих значения в банаховом пространстве, Бек выделил класс B-выпуклых пространств Банаха. Впоследствии этот класс подвергся интенсивному изучению в работах [67, 68, 71] и др. Оказалось, в частности, что класс B-выпуклых пространств совпадает с классом «равномерно не l_1» пространств, изучающихся Джеймсом. Приведем соответствующие определения.

2.3.1. Определение. Зафиксируем натуральное $n\geqslant 2$ и $\varepsilon>0$. Банахово пространство называется (n, ε)-выпуклым, если для любого набора из n нормированных векторов $\{x_i\}_1^n$ выполнено неравенство

$$\min_{\alpha_i=\pm 1}\left\|\sum \alpha_i x_i\right\| \leqslant n\cdot(1-\varepsilon).$$

2.3.2. Определение. Банахово пространство X называется B-выпуклым, если оно (n, ε)-выпукло для некоторых $n \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$. В терминах дистанций B-выпуклость равносильна следующему:

$$\sup_n \inf_{E_n} d(E_n, l_1^{(n)}) > 1 \quad (E_n \subset X, \ \dim E_n = n).$$

2.3.3. Определение. Для данного натурального n банахово пространство X называется равномерно не $l_1^{(n)}$ пространством, если

$$\inf_{E_n} d(E_n, l_1^{(n)}) > 1 \quad (E_n \subset X, \ \dim E_n = n).$$

В частности, при $n=2$ пространство X называется равномерно не квадратным, а при $n=3$ — равномерно не октаэдральным.

2.3.4. Определение. Банахово пространство X называется равномерно не l_1 пространством, если

$$\sup_n \inf_{E_n} d(E_n, l_1^{(n)}) = \infty, \quad (E_n \subset X, \ \dim E_n = n).$$

2.3.5. Теорема [71]. Следующие утверждения эквивалентны: X B-выпукло, X равномерно не l_1, l_1 не является финитно представимым в X.

«Внутреннее единство» класса B-выпуклых пространств характеризуется следующим предложением.

2.3.6. Теорема [67]. B-выпуклость инвариантна по отношению к изоморфизмам. Пространство X B-выпукло в том и только том случае, если B-выпукло X^*. Если X B-выпукло, то B-выпуклы все его подпространства и факторпространства.

Непосредственно из определения следует, что каждое суперрефлексивное (но не каждое рефлексивное!) пространство B-выпукло. Было высказано предположение, что каждое B-выпуклое пространство рефлексивно.

Нетрудно показать, что это предположение подтверждается, если потребовать, чтобы X обладало безусловным базисом, или было бы банаховой решеткой [69]. Действительно, нерефлексивное банахово пространство, удовлетворяющее одному из этих условий, содержит подпространство, изоморфное l_1 либо c_0 и, значит, не может быть B-выпуклым.

Без дополнительных ограничений на природу пространства доказано, что каждое $(2, \varepsilon)$-выпуклое пространство рефлексивно и что при $\varepsilon > 0{,}25$ рефлексивно каждое $(3, \varepsilon)$-выпуклое пространство [70].

Доказаны следующие условные предложения.

2.3.8. Теорема. Если каждое B-выпуклое пространство рефлексивно, то класс B-выпуклых банаховых пространств совпадает с классом суперрефлексивных пространств.

2.3.9. Теорема. Если $n \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$ и каждое (n, ε)-выпуклое банахово пространство рефлексивно, то каждое (n, ε)-выпуклое пространство суперрефлексивно.

2.3.10. Предположение о рефлексивности всех B-выпуклых пространств оказалось ложным: совсем недавно Джеймс построил пример равномерно не октаэдрального не рефлексивного банахова пространства. Это новое пространство Джеймса квазирефлексивно, однако оно существенно отличается от известного примера Джеймса (ср. 2.1.7).

2.4. **C-выпуклые банаховы пространства.**

2.4.1. Определение. Назовем, по аналогии с определением B-выпуклости, банахово пространство C-выпуклым, если в нем финитно не представимо пространство c_0.

Класс C-выпуклых пространств шире класса B-выпуклых пространств; в него входит, например, пространство l_1.

2.4.2. Теорема [67]. Банахово пространство X C-выпукло в том и только том случае, если

$$\sup_n \inf_{E_n} d(E_n, l_\infty^{(n)}) = \infty \quad (E_n \subset X, \ \dim E_n = n).$$

2.4.3. C-выпуклые пространства имеют прямое отношение к теории безусловно сходящихся рядов в банаховом пространстве. Напомним, что ряд Σx_k называется безусловно сходящимся, если он остается сходящимся после любой перестановки его членов; сумма его при перестановках не меняется. Ряд безусловно сходится в том и только том случае, если для любого набора знаков $\alpha_k = \pm 1$ сходится ряд $\Sigma \alpha_k x_k$. Орличу принадлежит следующее утверждение: если ряд Σx_k элементов из L_p безусловно сходится, то сходится числовой ряд $\Sigma \|x_k\|^s$, где $s = \max(p, 2)$. В связи с теоремой Орлича естественно ввести следующие определения.

2.4.4. Определение. Банахово пространство X принадлежит классу O_p, если для каждого безусловно сходящегося ряда в X сходится ряд $\Sigma \|x_k\|^p$.

Оказывается, что объединение всех классов $O_p (2 \leqslant p < \infty)$ совпадает с классом всех C-выпуклых пространств. Если же банахово пространство X не C-выпукло, то для любого набора чисел $t_k \searrow 0$ в нем найдется последовательность элементов x_k такая, что $\|x_k\| = t_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и ряд Σx_k безусловно сходится. Все это следует из рассмотрений [67] и [35] и следующей характеризации C-выпуклых пространств.

2.4.6. Теорема [113]. Банахово пространство C-выпукло в том и только том случае, если существуют показатель p и коэффициент K такие, что для любого конечного набора элементов этого пространства выполнено неравенство

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant K \cdot 2^{-n} \sum_{\alpha_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|.$$

§ 3. БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Теории базисов в банаховых пространствах посвящено очень большое число работ. Результаты, полученные до 1970 г., систематизированы в чрезвычайно обстоятельной монографии Зингера [138]. Отдельные вопросы теории базисов вошли в обзорные статьи [26], [108].

Поэтому мы сможем сосредоточить внимание лишь на новейших результатах, хотя для единства изложения нам придется упоминать об известных фактах теории базисов, часть которых стала уже классической.

3.1. Основные определения и факты. Одним из методов исследования бесконечномерного банахова пространства является приближение его (в том или ином смысле) конечномерными пространствами. Понятие базиса можно рассматривать как одно из возможных воплощений идеи приближения (исчерпания) пространства последовательностью его конечномерных подпространств. Напомним основные определения и факты.

3.1.1. Определение. Последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ элементов банахова пространства X называется базисом (Шаудера), если каждый элемент $x \in X$ единственным образом разлагается в ряд $x = \sum a_n x_n$, сходящийся к x по норме пространства.

3.1.2. Базис называют нормированным, если $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и полунормированным, если

$$0 < \inf_n \|x_n\| \leqslant \sup_n \|x_n\| < \infty.$$

3.1.3. С базисом связывается сопряженная система линейных функционалов $\{f_n\}_1^\infty$ такая, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, т. е. система $\{x_n, f_n\}$ оказывается биортогональной. Разложение элемента x записывается в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n.$$

Сопряженная система оказывается базисом в замыкании своей линейной оболочки.

Далеко не каждая биортогональная система является базисом. Достаточный (и необходимый) критерий: последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ должна быть полной в X, а нормы проекторов $S_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i$ ограничены в совокупности.

«Качество» базиса можно охарактеризовать базисной константой $b(x_n) = \sup_n \| S_n \|$. Если $b = 1$, то базис называется монотонным. Каждый базис можно сделать монотонным, переходя к эквивалентной норме. Однако существуют пространства без монотонного базиса и, более того, такие пространства X, в которых [56]

$$b(X) = \inf b(x_n) > 1;$$

здесь нижняя грань берется по всем базисам пространства X. Величину $b(X)$ принято называть базисной константой пространства X.

3.1.6. Определение. Два базиса $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в пространствах X и Y называются эквивалентными, если соответствие $Tx_n = y_n$ может быть распространено до изоморфизма между пространствами X и Y.

Понятие эквивалентности базисов (и, аналогично, других последовательностей) имеет широкие применения в теории нормированных пространств. Приведем здесь один замечательный результат, связанный с эквивалентностью базисов.

3.1.7. Пространство Пелчиньского [118]. Существует банахово пространство P_0 с нормированным базисом $\{e_n\}$, обладающее следующим свойством. Пусть X — банахово пространство с полунормированным базисом $\{x_m\}$. Найдется такая подпоследовательность $\{e_m'\}$ базиса $\{e_n\}$, что: 1) соответствие $Tx_m = e_m'$ распространяется до изоморфизма между X и подпространством $[e'_m] \subset P_0$ — замыканием линейной оболочки элементов $\{e_m\}$; 2) подпространство $[e'_m]$ имеет дополнение — замыкание линейной оболочки остальных членов базиса $\{e_n\}$. Пространство, обладающее свойствами 1) и 2), единственно с точностью до изоморфизма.

Метод, примененный Пелчиньским, заключается в непосредственном построении бесконечномерного пространства из конечномерных «блоков», специальным образом расположенных друг относительно друга. При этом существенно используется компактность $\mathfrak{M}_n$ и подобных совокупностей конечномерных пространств. Впервые этот метод был применен В. И. Гурарием для построения пространства универсального расположения.

Работа [118] имела значительный резонанс, так что теперь можно говорить о теории дополняемо универсальных базисов и нормированных пространств: [84, 93, 120, 121, 96, 122, 127, 146].

3.2. Проблема базиса и проблема аппроксимации. До недавнего времени основным открытым вопросом теории базисов была «Проблема базиса», поставленная Банахом более сорока лет тому назад: каждое ли бесконечномерное сепарабельное банахово пространство имеет базис?

Первый результат общего характера в направлении решения проблемы базиса также восходит к Банаху; впоследствии он неоднократно передоказывался и уточнялся.

3.2.1. Теорема. Каждое бесконечномерное банахово пространство имеет бесконечномерное подпространство с базисом.

Недавно было получено двойственное предложение.

3.2.2. Теорема [94]. Каждое бесконечномерное сепарабельное банахово пространство имеет бесконечномерное фактор-пространство с базисом.

В связи с тем, что проблема базиса долго не поддавалась решению, вводились другие, более слабые аппроксимирующие структуры. Они должны были заменить базис в тех пространствах, где существование его не удавалось установить, или в тех пространствах, где построенный базис оказывался почему-либо не очень удобным для применений. Так, например, были введены различные «базисы суммирования». Общий характер этих понятий можно проиллюстрировать на следующем примере.

3.2.3. Определение. Последовательность элементов $\{x_n\}$ банахова пространства X называется базисом Чезаро, если каждый элемент $x \in X$ единственным образом разлагается в ряд, суммируемый по Чезаро:

$$\lim_{n\to\infty}\left\| x-\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|=0.$$

Наиболее общие понятия такого рода были введены и детально исследованы Гротендиком.

3.2.4. Определение [41]. Говорят, что банахово пространство обладает аппроксимационным свойством (коротко: AP), если для каждого компактного множества $K\subset X$ и каждого $\varepsilon>0$ найдется конечномерный линейный оператор T такой, что

$$\|x-Tx\|<\varepsilon \text{ для всех } x\in K.$$

Если, сверх того, операторы T можно выбрать так, чтобы их нормы были ограничены в совокупности числом λ, не зависящим от K и ε, то говорят, что X обладает ограниченным аппроксимационным свойством (коротко: BAP).

Подобно базисной константе $b(X)$ можно ввести постоянную, характеризующую «качество» BAP:

$$b_0(X)=\inf\lambda,$$

где λ — число, фигурирующее в определении ограниченного аппроксимационного свойства.

3.2.5. Если пространство сепарабельно, то наличие в нем ограниченного аппроксимационного свойства равносильно следующему: существует последовательность линейных конечномерных операторов T_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \| x - T_n x \| = 0 \text{ для всех } x \in X.$$

Ясно, что существование в X базиса влечет наличие в нем ограниченного аппроксимационного свойства и $b_0(X) \leqslant b(X)$.

Вопрос о наличии в каждом банаховом пространстве аппроксимационного свойства также долго не поддавался решению (проблема аппроксимации), хотя ряд математиков, включая Гротендика, получил серьезные результаты в этом направлении. Так, было известно, что если проблема аппроксимации имеет отрицательное решение, соответствующий контрпример можно искать среди подпространств пространства c_0 или среди рефлексивных пространств [61]. Был построен интересный пример, который мы воспроизведем.

3.2.7. Пример [93]. Пусть $\{X_n\}_1^\infty$ — последовательность конечномерных нормированных пространств, плотная в классе всех конечномерных нормированных пространств в смысле дистанции. Образуем бесконечное декартово произведение

$$\mathfrak{C}_1 = \{X_1 \times X_2 \times \ldots\}_{l_1}.$$

Доказано: если существует банахово пространство без аппроксимационного свойства, то сопряженное пространство $\mathfrak{C}_1^*$ не обладает аппроксимационным свойством (при этом $\mathfrak{C}_1$ имеет базис!).

Известны и другие результаты, связанные с проблемой аппроксимации. Впрочем, все они, кроме результатов Гротендика, получены в самое последнее время.

3.2.8. Наконец, Энфло [58] (см. также [41, 33]) построил замечательный пример сепарабельного банахова пространства, не обладающего аппроксимационным свойством. Тем самым «попутно» была решена в отрицательном смысле проблема базиса. В работах [33, 51] теорема Энфло подверглась некоторым упрощениям и уточнениям. Теперь известно, что в каждом пространстве c_0 и l_p $(p>2)$ содержится подпространство без аппроксимационного свойства. Перенести этот результат на l_p при $(1 \leqslant p < 2)$ до сих пор не удалось. Можно предположить, что в каждом банаховом пространстве, не изоморфном гильбертову, содержится подпространство, не обладающее аппроксимационным свойством. Однако метод Энфло и его последователей недостаточен для такого окончательного решения проблемы аппроксимации.

3.2.9. Приведем еще одно из относящихся сюда условных предложений [61]: пусть все подпространства пространства $l_p (1 \leqslant p < 2)$ обладают аппроксимационным свойством; тогда то же верно и для всех подпространств пространства L_p и, в частности, для всех подпространств каждого пространства $l_q (p < q < 2)$.

3.3. Связи между аппроксимационными свойствами. После отрицательного решения проблемы аппроксимации более актуальными стали вопросы о связи между различными аппроксимационными свойствами.

3.3.1. В статье [62] была построена последовательность (попарно изоморфных) банаховых пространств X_n, каждое из которых обладает BAP, но константа $b_0(X_n)$ (см. определение 3.2.5), характеризующая «качество» аппроксимационного свойства, растет неограниченно. Произведение этих пространств

$$E = \{X_1 \times X_2 \times \ldots\}_{l_2}.$$

обладает AP, но не BAP.

3.3.2. Пока неизвестно, каждое ли сепарабельное банахово пространство с BAP имеет базис.

Если E — банахово пространство с базисом, то каждое его дополняемое подпространство X обладает BAP. Получено следующее важное обращение этого простого факта.

3.3.3. Теорема [95, 119]. Пусть X — сепарабельное банахово пространство с BAP; найдется пространство E с базисом, содержащее дополняемое подпространство X_1, изоморфное X.

Во многих случаях оказывается полезным установленный там же конечномерный аналог этой теоремы.

3.3.4. Теорема. Существует абсолютная константа K такая, что если X есть конечномерное банахово пространство, найдется конечномерное банахово пространство Y такое, что декартово произведение $X \times Y$ имеет базис, базисная константа которого не превосходит K.

С помощью этой теоремы доказывается, например, существование базиса в пространстве $\mathfrak{C}_1$, рассмотренном выше (пример 3.2.7) и в аналогичных пространствах-произведениях.

3.4. Базисы в конкретных пространствах.

3.4.1. Базисы в классических пространствах $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$ были построены давно (см. [138] стр. 10). Существование базиса в $C(Q)$ (Q — метрический несчетный компакт) было доказано Ф. С. Вахер (1952 г.). Долго не удавалось установить существование базиса в пространстве $C^k(I^n)$ всех функций n переменных, определенных в единичном кубе, у которых все частные производные порядка не выше k существуют и непрерывны (норма в $C^k(I^n)$ определяется как наибольшее значение абсолютных величин всех этих производных). Эта задача была решена в работах [48] и [49]. Еще дольше не поддавалось пространство A всех функций, аналитических в круге и непрерывных вплоть до границы. Базис в этом пространстве совсем недавно построил С. В. Бочкарев [1]. Пример Бочкарева выглядит неожиданно простым, но его обоснование потребовало применения некоторых тонких оценок.

До сих пор остается открытым вопрос о существовании в конкретных пространствах Банаха базисов определенного типа. Вот некоторые из относящихся сюда задач.

3.4.2. Задача. Существует ли в L_1 [0, 1] нормированный базис $\{x_n\}$ такой, что

$$\|\Sigma a_n x_n\| \leqslant A\sqrt{\Sigma|a_n|^2}$$

для любых конечных наборов коэффициентов (гильбертов базис)?

3.4.3. Задача. Существует ли в $C[0, 1]$ нормированный базис такой, что

$$\sqrt{\Sigma|a_n|^2} \leqslant A\|\Sigma a_n x_n\|$$

для любых конечных наборов коэффициентов (бесселев базис)?

3.4.4. Задача. Существует ли в L_1 [0, 1] нормированный базис $\{x_n\}$, последовательность членов которого слабо сходится к нулю (wc_0-базис)?

3.5. Безусловные базисы.

3.5.1. Определение. Базис в банаховом пространстве X называется безусловным, если разложение любого элемента $x=\Sigma a_n x_n$ образует безусловно сходящийся ряд. Последнее означает (одна из эквивалентных формулировок), что ряд $\Sigma\alpha_n a_n x_n$ сходится при любом наборе коэффициентов $\alpha_n=\pm 1$.

3.5.2. Не каждое банахово пространство имеет безусловный базис. Например, пространства C [0, 1] и L_1 [0, 1] не только сами не имеют безусловного базиса, но и не изоморфны никакому подпространству пространства с безусловным базисом. То же верно и для квазирефлексивного пространства Джеймса.

3.5.3. Пример рефлексивного пространства, не изоморфного никакому подпространству пространства с безусловным базисом привел Пелчиньский [96]; это — бесконечное произведение

$X=\{L_2[0,1]\times L_3[0,1]\times L_4[0,1]\times\ldots\}_{l_2}$.

3.5.4. В пространстве $L_p[0,1]$ $(1<p<\infty)$ безусловным базисом является система Хаара; новое краткое доказательство этого факта, опирающееся на теорию вероятностей, получил недавно В. Ф. Гапошкин [5].

Тригонометрическая система образует в L_p при $p\neq 2$ лишь условный (т. е. не безусловный) базис.

Следующее предложение показывает, что условные базисы — более распространенный объект, чем безусловные.

3.5.5. Теорема [121]. Если банахово пространство имеет базис, то оно имеет бесконечно много попарно неэквивалентных условных базисов.

Хорошо известно, что каждый нормированный безусловный базис в пространстве l_2 эквивалентен каноническому базису.

Вопрос о существовании других банаховых пространств с «единственным безусловным базисом» получил решение в следующих теоремах.

3.5.6. Теорема [109]. Если банахово пространство имеет безусловный базис, и все нормированные безусловные базисы в нем эквивалентны, то оно изоморфно одному из трех пространств: l_1, l_2 или c_0.

3.5.7. Теорема [81]. Если банахово пространство имеет два неэквивалентных нормированных безусловных базиса, то оно имеет несчетное множество таких базисов.

Для безусловных базисов оказывается полезным следующее понятие.

3.5.8. Определение. Два базиса называются перестановочно эквивалентными, если они оказываются эквивалентными после подходящей перестановки членов одного из них.

3.5.9. Теорема [40, 145]. Каковы бы ни были p и q ($1 \leqslant p < q \leqslant \infty$), в пространстве $l_p \times l_q$ все нормированные безусловные базисы перестановочно эквивалентны (под «l_∞» понимаем здесь c_0).

Доказательство этой теоремы опирается на «существенную неизоморфность» пространств l_p.

3.5.10. Мы уже упоминали выше о замечательном пространстве Пелчиньского P_0 (см. 3.1.7). Аналогичный пример построен им и для безусловных базисов. Это — пространство P_1 с нормированным безусловным базисом $\{e_n\}$ таким, что каждый нормированный безусловный базис (в любом пространстве X) эквивалентен некоторой подпоследовательности базиса $\{e_n\}$. Пространство P_1 единственно с точностью до изоморфизма.

Приведем два нерешенных вопроса теории безусловных базисов.

3.5.11. Каждое ли банахово пространство имеет бесконечномерное подпространство с безусловным базисом?

3.5.12. Каждое ли дополняемое бесконечномерное подпространство пространства с безусловным базисом имеет безусловный базис?

3.6. Симметричные базисы.

3.6.1. Определение. Базис $\{x_n\}$ банахова пространства X называется симметричным, если он эквивалентен базису $\{x_{\pi(n)}\}$ при любой перестановке π натурального ряда.

Очевидно, каждый симметричный базис безусловен. Обратное, как показывают простые примеры, неверно. Основные примеры симметричных базисов — канонические базисы в пространствах c_0 и $l_p (1 \leqslant p < \infty)$. В последнее время интенсивно исследуются и другие пространства с симметричным базисом. Это, в частности, пространства последовательностей Орлича l_M, Марцинкевича $M_0(c)$ и Лоренца $\Lambda(c)$ (см. [38, 42, 105—107]).

С помощью симметричного базиса можно ввести в X «симметричную» норму, эквивалентную исходной:

$$\|x\|_0 = \sup_{\alpha=\pm 1} \sup_{\pi} \left\| \sum \alpha_n a_n x_{\pi(n)} \right\| \quad \left(x = \sum a_n x_n\right);$$

эта норма является симметричной функцией коэффициентов базисного разложения. Впрочем, в перечисленных выше пространствах уже исходная норма является симметричной по отношению к каноническому базису.

Так как большинство «обычных» банаховых пространств не имеет симметричного базиса (например, его нет в L_p $[0, 1]$), может возникнуть представление о малой распространенности симметричных базисов. Это представление в определенной степени опровергается следующими теоремами.

3.6.2. Теорема [103]. Каждое банахово пространство с безусловным базисом изоморфно дополняемому подпространству некоторого банахова пространства с симметричным базисом.

3.6.3. Теорема [141]. Каждое рефлексивное банахово пространство с безусловным базисом изоморфно дополняемому подпространству некоторого рефлексивного банахова пространства с симметричным базисом.

Применение первой из этих теорем к пространству Пелчиньского P_1 приводит к неожиданному результату: оно имеет несчетное множество попарно неэквивалентных симметричных базисов (исходный базис $\{e_n\}$, конечно, не является симметричным).

3.6.4. Как и в случае безусловных базисов, естественно, возникает вопрос о пространствах, имеющих единственный с точностью до эквивалентности симметричный базис. Этот вопрос до конца не решен. Известно, что сюда относится пространство c_0, все пространства $l_p(1 \leqslant p < \infty)$ и пространства Лоренца. Среди пространств Орлича есть такие, которые содержат несчетное множество попарно неэквивалентных симметричных базисов.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Бочкарев С. В.,** Существование базиса в пространстве функций, аналитических в круге, и некоторые свойства системы Франклина. Мат. сб., 1974, 95, № 1, 3—18 (РЖМат, 1975, 1Б175)
2. **Браверман М. Ш.,** О геометрических свойствах симметричных пространств. Сиб. мат. ж., 1974, 15, № 3, 675—679 (РЖМат, 1974, 10Б589)
3. **Буй-Мин-Чи,** Гурарий В. И., Некоторые характеристики нормированных пространств и их применение к обобщению равенства Парсеваля. Теория ф-ций, функц. анализ и их прилож. Респ. науч. сб., 1969, вып. **8**, 74—91 (РЖМат, 1969, 12Б564)
4. **Вейц Б. Е.,** Об одном классе векторных базисов и базисов из подпространств. Сиб. мат. ж., 1973, 14, № 5, 933—950 (РЖМат, 1974, 2Б715)
5. **Гапошкин В. Ф.,** О системе Хаара, как безусловном базисе в $L_p\,[0,1]$. Мат. заметки, 1974, **15**, № 2, 191—196 (РЖМат, 1974, 6Б97)

6. **Глазман И. М.**, Любич Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах. М., «Наука», 1969 (РЖМат, 1969, 7А300К)
7. **Грюнбаум Б.**, Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. Пер. с англ. М., «Наука», 1971
8. **Гурарий В. И.**, Гурарий Н. И., Об одном секвенциальном свойстве пространства l_1. Мат. исследования. Кишинев, АН МолдССР, 1969, **4**, вып. 3, 140—145 (РЖМат, 1970, 4Б600)
9. —, —, О базисах в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 1, 210—215 (РЖМат, 1971, 6Б622)
10. —, Кадец М. И., Мацаев В. И., О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p. Мат. сб., 1966, **70**, № 4, 481—489 (РЖМат, 1967, 1Б341)
11. —, —, Мацаев В. И., О зависимости некоторых свойств пространств Минковского от асимметрий. Мат. сб., 1966, **71**, № 1, 24—29 (РЖМат, 1967, 2Б475)
12. **Гурарий Н. И.**, О последовательностях коэффициентов разложений по базисам в гильбертовом и банаховом пространствах. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 1, 216—223 (РЖМат, 1971, 6Б623)
13. —, Некоторые теоремы о базисах в гильбертовом и банаховом пространствах. Докл. АН СССР, 1970, **193**, № 5, 974—977 (РЖМат, 1970, 12Б703)
14. —, О p-гильбертовых и p-бесселевых системах. Мат. исследования. Кишинев, АН МолдССР, 1971, **6**, вып. 1, 162—167 (РЖМат, 1971, 11Б730)
15. —, Аналоги равенства Парсеваля для неортогональных базисов в гильбертовом пространстве. Тр. 4-й зимн. школы по мат. программиров. и смеж. вопр., Дрогобыч, 1971, вып. 4, М., 1972, 50—53 (РЖМат, 1973, 12Б725)
16. —, Лиокумович В. И., Об устойчивости ортогональных базисов в равномерно выпуклом пространстве. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 10, 23—26 (РЖМат, 1973, 3Б634)
17. **Гуревич Л. А.**, Полубезусловные базисы. Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та, 1971, вып. 1, 44—59 (РЖМат, 1971, 5Б718)
18. **Даугавет И. К.**, Некоторые приложения обобщенного тождества Марцинкевича—Бермана. Вестник Ленингр. ун-та, 1968, **19**, № 4, 59—64 (РЖМат, 1969, 3Б551)
19. **Иванов Л. А.**, Некоторые двумерные банаховы пространства с симметричным наклоном. Теория ф-ций, функц. анализ и их прилож. Респ. науч. сб., 1968, вып. 6, 66—67 (РЖМат, 1969, 11Б505)
20. **Кадец М. И.**, Митягин Б. С., Дополняемые подпространства в банаховых пространствах. Успехи мат. наук, 1973, **28**, вып. 6, 77—94 (РЖМат, 1974, 4Б606)
21. —, Снобар М. Г., О некоторых функционалах на компакте Минковского. Мат. заметки, 1971, **10**, № 4, 453—457 (РЖМат, 1972, 2Б595)
22. **Котляр Б. Д.**, О слабой сходимости в пространствах Орлича. Укр. мат. ж., 1971, **23**, № 2, 240—244 (РЖМат, 1971, 7Б651)
23. **Кучай В. В.**, О линейных размерностях координатных пространств Орлича. Сообщ. III Конфер. Ростовск. науч. математ. о-ва, 1969, т. I. Ростов-на-Дону, 1969, 18—26 (РЖМат, 1970, 7Б608)
24. **Кучмент П. А.**, О дополняемых подпространствах с симметричным базисом. Докл. АН СССР, 1973, **208**, № 5, 1027—1030 (РЖМат, 1973, 6Б651)
25. **Лиокумович В. И.**, Некоторые теоремы из геометрии пространств Минковского. Теория функций, функц. анал. и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1971, вып. 14, 117—126 (РЖМат, 1972, 5Б678)
26. **Мильман В. Д.**, Геометрическая теория пространств Банаха. Ч. I. Теория базисных и минимальных систем. Успехи мат. наук, 1970, **25**, вып. 3, 113—174 (РЖМат, 1971, 1Б668)

27. —, Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечениях выпуклых тел. Функц. анализ и его прилож., 1971, 5, № 4, 28—37 (РЖМат, 1972, 4Б781)
28. —, Геометрическая теория пространств Банаха. Ч. II. Геометрия единичной сферы. Успехи мат. наук, 1971, 26, № 6, 73—149 (РЖМат, 1972, 6Б571)
29. —, Расстояние Банаха—Мазура и геометрические свойства B-пространства. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1974, вып. 19, 23—32 (РЖМат, 1974, 10Б586)
30. **Олевский А. М.**, Об операторах, производящих условные базисы в гильбертовом пространстве. Мат. заметки, 1972, **12**, № 1, 73—84 (РЖМат, 1972, 10Б440)
31. **Пелчиньский А.**, Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций. Пер. с англ. М. «Мир», 1970 (РЖМат, 1971, 1Б687К)
32. —, О некоторых проблемах Банаха. Успехи мат. наук, 1973, **28**, вып. 6, 67—75 (РЖМат, 1974, 4Б604)
33. —, Ф и г е л ь Е., О методе Энфло построения банаховых пространств без свойства аппроксимации. Успехи мат. наук, 1973, **28**, вып. 6, 95—108 (РЖМат, 1974, 4Б605)
34. **Посицельский Е. Д.**, Проекционные константы симметричных пространств. Мат. заметки, 1974, **15**, № 5, 719—727 (РЖМат, 1974, 9Б775)
35. **Раков С. А.**, О банаховых пространствах, в которых не верна теорема Орлича. Мат. заметки, 1973, **14**, № 1, 101—106 (РЖМат, 1973, 11Б564)
36. **Снобар М. Г.**, О p-абсолютно суммирующих константах. Теория функций, функц. анализ и их прилож. Респ. межвед. науч. сб., 1972, вып. 16, 38—41 (РЖМат, 1973, 4Б792)
37. **Субботин Ю. Н.**, О базисе в $C[0, 2\pi]$. Тр. Центр. зональн. объедин. мат. кафедр Калинин. гос. пед. ин-т, 1970, вып. 1, 141—144 (РЖМат, 1971, 8Б511)
38. **Токарев Е. В.**, О линейной размерности некоторых банаховых пространств последовательностей. Теор. функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. сб., 1974, вып. 19, 90—101 (РЖМат, 1974, 10Б632)
39. **Цирельсон Б. С.**, Не в любое банахово пространство можно вложить l_p или c_0. Функц. анализ. и его прилож., 1974, 8, № 2, 57—60 (РЖМат, 1974, 9Б773)
40. **Эдельштейн И. С.**, Дополняемые подпространства и безусловные базисы в $l_p \oplus l_2$. Теория функций, функц. анализ и их прилож. Респ. науч. сб., 1970, вып. 10, 132—143 (РЖМат, 1970, 12Б704)
41. **Энфло Пер**, Контрпример в проблеме аппроксимации в банаховом пространстве. Математика. Период сб. пер. ин. статей, 1974, **18**, № 1, 146—155 (РЖМат, 1974, 5Б709)
42. **Altshuler Zvi**, C a s a s s a P. G., B o r - L u h L i n, On symmetric basic sequences in Lorentz sequences spaces. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 2, 140—155 (РЖМат, 1974, 6Б718)
43. **Brown Dean R.**, B-convexity and reflexicity in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **187**, № 1, 69—76 (РЖМат, 1974, 10Б640)
44. —, P-convexity and B-convexity in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **187**, № 1, 77—81 (РЖМат, 1974, 10Б601)
45. **Brunel Antoine**, S u c h e s t o n L o i s, Sur quelques conditions equivalents a la superreflexicité dans les espaces de Banach. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 20, A993—A994 (РЖМат, 1973, 4Б733)
46. **Calder J. R.**, H i l l J. B., A collection of sequences spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **152**, № 1, 107—118 (РЖМат, 1971, 8Б532)
47. **Casassa P.**, On a geometric condition related to boundedly complete bases and normal structure in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **36**, № 2, 443—447 (РЖМат, 1973, 7Б569)
48. **Ciesielski Z.**, A construction of basis in $C^1(I^2)$. Studia Math., 1969, **33**, № 2, 243—247 (РЖМат, 1970, 1Б588)

49. —, Domsta J. Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p{}^m(I^d)$. Studia Math., 1972, **41**, № 2, 211—224 (РЖМат, 1972, 9Б563)
50. **Dacuncha-Castelle Didier**, Schreiber Michel, Sous-espaces symmetriques des espaces d'Orlicz. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 8, A629—A631 (РЖМат, 1973, 7Б533)
51. **Davie A. M.**, The approximation problem for Banach spaces. Bull. London Math. Soc., 1973, 5, № 3, 261—266 (РЖМат, 1974, 5Б710)
52. **Davis William J.**, Basis preserving maps. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **22**, № 1, 34—36 (РЖМат, 1970, 4Б599)
53. —, Remarks of finite rank projections. J. Approxim. Theory, 1973, **9**, № 3, 205—211 (РЖМат, 1974, 5Б728)
54. **Dean David W.**, Lin Bor-Luh, Singer J., On k-shrinking and k-boundedly complete basis in Banach spaces. Pacific J. Math., 1970, **32**, № 2, 323—331 (РЖМат, 1970, 10Б542)
55. **Deschaseaux Jean-Pierre**, Une caractérisation de certain espaces vectorieles normés de dimension finie par leur constante de Macphail. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 20, A1349—A1351 (РЖМат, 1973, 11Б563)
56. **Dor L. E.**, A note on monotone bases. Isr. J. Math., 1973, **14**, № 3, 285—286 (РЖМат, 1974, 1Б508)
57. **Enflo Per**, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. Isr. J. Math., 1972, **13**, № 3-4, 281—288 (РЖМат, 1973, 8Б610)
58. —, A contrexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta math., 1973, **130**, № 3-4, 309—317 (РЖМат, 1974, 1Б484)
59. —, A Banach spaces with basic constant >1. Ark. mat., 1973, № 1, 103—107 (РЖМат, 1974, 1Б485)
60. **Figiel T.**, Some remarks on Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies. Colloq. math., 1972, **24**, № 2, 241—252 (РЖМат, 1973, 1Б466)
61. —, Factorisation of compact operators and application to the approximation problem. Studia Math. (PRL), 1973, **45**, № 2, 191—210 (РЖМат, 1973, 11Б630)
62. —, Johnson W. B., The approximation property does not imply the bounded approximation property. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 1, 197—200 (РЖМат, 1974, 7Б642)
63. **Fučik Svatopluk**, John Oldrich, Nečas Jindřich, On the existence of Shauder basis in Sobolev spaces. Comment. math. Univ. Carol., 1972, **13**, № 1, 163—175 (РЖМат, 1972, 9Б565)
64. —, Kufner Alois, O Shaderovych basich a jejich aplikacich. Pokr. math. fiz. a astronom., 1974, **19**, № 1, 11—18 (РЖМат, 1974, 7Б668)
65. **Gamlen J. L. B.**, Gaudet R. J., On subsequences of the Haar system in L_p $(1<p<\infty)$. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 4, 404—413 (РЖМат, 1974, 8Б597)
66. **Garling D. J. H.**, Gordon Y., Relations between some constants associated with finite dimensional Banach spaces. Isr. J. Math., 1971, **9**, № 3, 346—361 (РЖМат, 1971, 10Б483)
67. **Giesy Daniel P.**, On a convexity condition in normed linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **125**, № 1, 114—146 (РЖМат, 1968, 8Б634)
68. —, Additions and corrections to «On a convexity condition...». Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **140**, № 3, 511—512 (РЖМат, 1970, 2Б673)
69. —, The completion of a B-convex normed Riesz space is reflexive. J. Funct. Anal., 1973, **12**, № 2, 188—198 (РЖМат, 1973, 7Б593)
70. —, B-convexity and reflexivity. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 4, 430—436 (РЖМат, 1974, 8Б613)
71. —, James R. C., Uniformly non l_1 and B-convex Banach spaces. Stud. Math. (PRL), 1973, **48**, № 1, 61—69 (РЖМат, 1974, 5Б708)
72. **Gordon Y.**, On the projection and Macphail constants in $l_p^{(n)}$-spaces. Isr. J. Math., 1968, **6**, № 3, 295—302 (РЖМат, 1969, 7Б472)
73. —, On p-absolutely summing constants of Banach spaces. Isr. J. Math., 1969, **7**, № 2, 151—163 (РЖМат, 1970, 4Б583)

74. —, On the distance coefficient isomorphic function spaces. Isr. J. Math., 1970, 8, № 4, 391—397 (РЖМат, 1971, 5Б704)
75. —, Assymmetry and projection constants in Banach spaces. Isr. J. Math., 1973, **14**, № 1, 50—62 (РЖМат, 1973, 9Б612)
76. —, Lewis D. R., Retherford J. R., Banach ideals of operators with applications to the finite dimensional structure of Banach spaces. Isr. J. Math., 1972, **13**, № 3—4, 348—360 (РЖМат, 1973, 7Б680)
77. —, —, —, Banach ideals of operators with applications. J. Funct. Anal., 1973, **14**, № 1, 85—129 (РЖМат, 1974, 2Б871)
78. —, Witsenhausen H. S., On extensions of the Gale-Berlekamp switching problem and constants of l_p-spaces. Isr. J. Math., 1972, **11**, № 2, 216—229 (РЖМат, 1972, 11Б724)
79. **Gosselin R. P.**, Neuwirth Y. H., On Paley-Wiener bases. J. Math. and Mech., 1969, **18**, № 9, 871—879 (РЖМат, 1970, 3Б559)
80. **Harrel R. E.**, Karlivitz L. A., Girth and flat Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, **76**, № 6, 1288—1291 (РЖМат, 1971, 7Б666)
81. **Hennefeld Julen**, On nonequivalent normalized unconditional bases for Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 1, 156—158 (РЖМат, 1974, 7Б669)
82. **Holub J. R.**, Some problems concerning basis in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **23**, № 3, 521—525 (РЖМат, 1970, 8Б554)
83. —, Bases of type P and reflexivity of Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **25**, № 2, 357—362 (РЖМат, 1971, 9Б468)
84. —, Universal bases in Banach spaces. Rev. roum. math. pures et appl., 1971, **16**, № 8, 1193—1199 (РЖМат, 1972, 4Б790)
85. —, Hilbertian, besselian and semishrinking bases. Stud. Math. (PRL), 1971, **37**, № 3, 203—211 (РЖМат, 1972, 1Б704)
86. —, Retherford J. R., Some curious bases for c_0 and $C\ [0,1]$. Stud. Math. (PPL), 1970, **34**, № 3, 227—240 (РЖМат, 1970, 12Б705)
87. —, —, The stability of basis in Banach and Hilbert spaces. J. reine und angew. Math., 1971, **246**, 136—146 (РЖМат, 1971, 9Б472)
88. —, —, A note on unconditional bases. Can. Math. Bull., 1972, **15**, № 3, 369—372 (РЖМат, 1973, 3Б636)
89. **James Robert C.**, Some self-dual properties of normed linear spaces. Ann. Math. Stud., 1972, № 69, 159—175 (РЖМат, 1972, 7Б549)
90. —, Super-reflexive Banach spaces. Can. J. Math., 1972, **24**, № 5, 896—904 (РЖМат, 1973, 4Б771)
91. —, Super-reflexive spaces with bases. Pacif. J. Math., 1972, **41**, № 2, 409—419 (РЖМат, 1973, 2Б664)
92. —, Schäffer Juan Jorge, Super-refexivity and the girth of the spheres. Isr. J. Math., 1972, **11**, № 4, 388—404 (РЖМат, 1973, 1Б461)
93. **Johnson William B.**, A complementary universal conjugate Banach spaces and its relations to the approximation problem. Isr. J. Math., 1972, **13**, № 3—4, 301—310 (РЖМат, 1973, 7Б547)
94. —, Rosenthal H. P., On W^*-basic sequences and their applications on the study of Banach spaces. Stud. Math. (PRL), 1972, **43**, 77—92 (РЖМат, 1972, 11Б722)
95. —, Zippin M., On bases, finite dimensional decomposition and weaker structures in Banach spaces. Isr. J. Math., 1971, **9**, № 4, 488—506 (РЖМат, 1972, 3Б524)
96. **Kadec M. I.**, On complementably universal Banach spaces. Studia Math. (PRL), 1971, **40**, № 1, 85—89 (РЖМат, 1972, 2Б585)
97. **Kalton N. J.**, Bases in weakly sequentially complete Banach spaces. Stud. Math. (PRL), 1972, **42**, № 2, 121—131 (РЖМат, 1972, 11Б721)
98. **Knowles Robert J.**, Cook Thurlow A., Some results on Auerbach bases for finite dimensional normed spaces. Bull. Soc. roy. sci. Liege, 1973, **42**, № 11—12, 518—522 (РЖМат, 1974, 8Б595)

99. **Kottman Clifford A.**, Packing and reflexivity Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **150**, № 2, 565—576 (РЖМат, 1971, 7Б677)
100. **Kwapien S.**, P e ł c z y ń s k i A., The main triangle projection in matrix spaces and its applications. Stud. Math. (PRL), 1970, **34**, № 1, 43—68 (РЖМат, 1970, 11Б559)
101. **Lin Bor-Luh**, S i n g e r J., On conditional bases of l_2. Rocz. Pol. tow. mat., 1971, ser. 1, **15**, 135—139 (РЖМат, 1971, 12Б821)
102. **Lindenstrauss J.**, Some aspects of the theory of Banach spaces. Advances Math., 1970, **5**, № 2, 159—180 (РЖМат, 1971, 5Б702)
103. —, A remark on symmetric bases. Isr. J. Math., 1972, **13**, № 3—4, 317—320 (РЖМат, 1973, 7Б567)
104. —, P e ł c z y ń s k i A., Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications. Stud. Math., 1968, **29**, № 3, 275—326 (РЖМат, 1969, 3Б453)
105. —, T z a f r i r i L., On Orlicz sequence spaces. Isr. J. Math., 1971, **10**, № 3, 379—390 (РЖМат, 1972, 6Б606)
106. —, —, On Orlicz sequence spaces. II. Isr. J. Math., 1972, **11**, № 4, 355—379 (РЖМат, 1972, 11Б736)
107. —, —, On Orlicz sequence spaces. III. Isr. J. Math., 1973, **14**, № 4, 368—389 (РЖМат, 1974, 2Б730)
108. —, —, Classical Banach spaces. Lect. Notes. Math., 1973, 338, IX, 243 p. (РЖМат, 1974, 2Б684)
109. —, Z i p p i n M., Banach spaces with a unique unconditional basis. J. Funct. Anal., 1969, 3, № 1, 115—125 (РЖМат, 1969, 9Б423)
110. **Marti Jürg T.**, Introduction to the theory of bases. (Springer Tracts Natur. Philos., 18). Berlin—Heidelberg—New-York, Springer, 1969, XXII, 149 p. (РЖМат, 1970, 7Б617К)
111. **Maurey B.**, Sur une application de la théorie des opérateurs p-sommants. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 17, A304—A307 (РЖМат, 1972, 9Б592)
112. —, Sur certain proprietes des operateurs sommants. C. r. Acad. sci., **1973**, **277**, № 21, A1053—A1055 (РЖМат, 1974, 4Б654)
113. —, P i s i e r G., Caratérisation d'une class d'espaces de Banach par des propriétés de séries aleatories vectorielles. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 14, A687—A690 (РЖМат, 1974, 5Б701)
114. **McArthur C. W.**, Developments in Schauder basis theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, 78, № 6, 877—908 (РЖМат, 1973, 11Б568)
115. **McGuigan Robert A. Jr.**, Near isometry of Banach spaces and the Banach-Mazur distance. Doct. diss. Univ. Md., 1968, 76 pp., Dissert. Abstr., 1969, **B29**, № 11, 4275—4276 (РЖМат, 1970, 4Б592D)
116. —, Two near-isometry invariants of Banach spaces. Compos. math., 1970, 22, № 3, 265—268 (РЖМат, 1972, 2Б586)
117. **Nielsen N. T.**, W o j t a z c z y k P., A remark on bases in L_p-spaces with an application to complementably universal L_∞-spaces. Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math. astron. et phys., 1973, **21**, № 3, 249—254 (РЖМат, 1973, 8Б627)
118. **Pełczyński A.**, Universal bases. Studia Math., 1969, **32**, № 3, 247—268 (РЖМат, 1969, 12Б571)
119. —, Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis. Studia Math. (PRL), 1971, **40**, № 3, 239—243 (РЖМат, 1972, 4Б789)
120. —, O pewnych problemach Banacha. Pocz. Pol. tow. mat., 1972, **15**, ser. 2, 3—11 (РЖМат, 1973, 5Б631)
121. —, S i n g e r J., On nonequivalent bases and conditional bases in Banach spaces. Studia Math., 1964, **25**, № 1, 5—25 (РЖМат, 1965, 8Б415)
122. —, W o j t a z c z y k P., Banach spaces with finite dimensional expansion of identity and universal bases of finite dimensional subspaces. Studia Math. (PRL), 1971, **40**, № 4, 91—108 (РЖМат, 1972, 3Б506)
123. **Pisier G.**, Type des espaces normes. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 26, A1673—A1676 (РЖМат, 1973, 11Б548)

124. —, Sur les espaces de Banach qui ne contienent pas uniformement de $l_1^{(n)}$. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 20, A991—A994 (РЖМат, 1974, 6Б692)
125. —, Martingales a valeurs dans les espaces uniformément convexes. C. r. Acad. sci., 1974, **A279**, № 16, 647—649
126. **Retherford J. R.**, A semishrinking basis which is not shrinking. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, **19**, № 3, 766—768 (РЖМат, 1971, 8Б509)
127. **Rolland R.**, Sur l'existence et l'unicite de bases complementairement universalles pour quelques de bases d'espaces de Banach. C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 24, A1567—A1569 (РЖМат, 1974, 1Б705)
128. **Samn Sherwood**, A bounded Hilbertain basis in C [0,1]. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **40**, № 2, 465—469 (РЖМат, 1974, 6Б717)
129. **Saphar P.**, Hipotése d'approximation á l'ordre p dans les espaces de Banach et approximation d'applications p absolument sommantes. Isr. J. Math., 1972, **13**, № 3—4, 379—399 (РЖМат, 1973, 8Б614)
130. **Schaffer Juan Jorge.** Minimum girth of spheres. Math. Ann., 1970, **184**, № 3, 169—171 (РЖМат, 1970, 7Б610)
131. —, Spheres with maximum inner diameter. Math. Ann., 1971, **190**, № 3, 242—247 (РЖМат, 1971, 7Б664)
132. —, More distant than the antipodes. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, № 4, 606—609 (РЖМат, 1972, 2Б594)
133. —, On the geometry of spheres in L-spaces. Isr. J. Math., 1971, **10**, № 1, 114—120 (РЖМат, 1972, 3Б522)
134. —, On the geometry of spheres in spaces of continuous functions. J. anal. math., 1973, **26**, 337—389 (РЖМат, 1974, 6Б731)
135. —, Sundaresan Kondagupta. Reflexivity and the girth of spheres. Math. Ann., 1970, **184**, № 3, 163—168 (РЖМат, 1970, 7Б609)
136. **Semadeni Z.**, Banach spaces of continuous functions. Vol. I. Monogr. mat., 1971, **55**, 584 pp. (РЖМат, 1972, 3Б498К)
137. **Shirey J. E.**, Zink R. E., On unconditional bases in certain Banach function spaces. Studia Math. (PRL), 1970, **36**, № 2, 169—175 (РЖМат, 1971, 5Б720)
138. **Singer J.**, Bases in Banach spaces. I (Grundlehren math. Wiss, 154) Heidelberg—New-York, Springer, 1970, VIII, 688 pp., ill. (РЖМат, 1971, 1Б677К)
139. **Sternbach L.**, On k-shrinking and k-boundedly complete basis sequences and quasy-reflexive spaces. Pacif. J. Math., 1971, **37**, № 3, 817—823 (РЖМат, 1972, 2Б605)
140. **Szankowski A.**, An example of a universal Banach space. Isr. J. Math., 1972, **11**, № 3, 292—296 (РЖМат, 1973, 1Б465)
141. —, Embedding Banach spaces with unconditional bases into spaces with symmetric bases. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 1, 53—59 (РЖМат, 1974, 2Б695)
142. **Warren H. E.**, A special basis for C[0,1]. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **27**, № 3, 495—499 (РЖМат, 1972, 4Б793)
143. **Wojtaszczyk P.**, Approximation properties and universal Banach spaces. Bull. Soc. Math. France, 1972, mem. № 31—32, 395—398 (РЖМат, 1973, 6Б640)
144. —, Existance of some special bases in Banach spaces. Stud. Math. (PRL), 1973, **47**, № 1, 83—93 (РЖМат, 1974, 2Б717)
145. —, On complemented subspaces and unconditional bases in l_p+l_q. Stud. Math. (PRL), 1973, **47**, № 3, 197—206 (РЖМат, 1974, 5Б711)
146. **Zippin M.**, Existance of universal members in certain families of bases of Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **26**, № 2, 294—300 (РЖМат, 1971, 9Б471)