КАДЕЦ

Кадец М.И.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

ПРЕПРИНТ

НОВОСИБИРСК • 1975

Академия наук СССР Сибирское отделение

Вычислительный центр

ШКОЛА ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(25—31 августа)

Кадец М.И.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

Препринт

Новосибирск 1975

М.И.Кадец

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

Теория универсальных нормированных пространств, ведущая начало от классической теоремы Банаха-Мазура об универсальности пространства непрерывных функций $C[0,1]$, лишь в самое последнее время обогатилась достаточным числом серьезных результатов и приобрела право на существование в качестве самостоятельного раздела геометрической теории нормированных пространств.

Настоящая лекция является, по-видимому, первой попыткой собрать вместе все факты, касающиеся универсальности. В пяти ее параграфах рассмотрены различные модификации понятия универсального пространства и связи между ними. Особо выделена связь между универсальностью и аппроксимационными свойствами банахова пространства. В конце лекции приведены изящные теоремы о "точной" универсальности по отношению к конечномерным пространствам.

Изложение материала в лекции по необходимости краткое. Приводятся лишь определения, результаты и иногда - наброски доказательств. Сформулированы некоторые открытые вопросы.

§ I. Изометрическая и изоморфная универсальность

I.I. В 1933 году С.Банах и С.Мазур [I] установили следующее замечательное свойство пространства $C[0,1]$: каково бы ни было сепарабельное банахово пространство X, в $C[0,1]$ найдется подпространство, изометричное X. По этому поводу говорят, что пространство $C[0,1]$ является изометрически универсальным элементом в классе всех сепарабельных пространств Банаха. Аналогичным свойством универсальности обладает каждое пространство $C[Q]$, где Q несчетный метрический компакт. Универсальными являются и другие банаховы пространства, существенно отличные от $C[Q]$, например, $A[D]$ (пространство всех функций, аналитических в круге D и непрерывных вплоть до границы) [2] и пространство Гурария G, о котором мы будем говорить позднее.

I.2. Банахово пространство ℓ_1 также универсально, хотя и в другом смысле. Каково бы ни было сепарабельное банахово пространство X, оно изометрично некоторому фактор-пространству пространства ℓ_1 [I]. Это свойство пространства ℓ_1 можно назвать фактор-универсальностью.

I.3. Из фактор-универсальности пространства ℓ_1 легко выводится изометрическая универсальность пространства $\ell_\infty = \ell_1^*$ в классе всех пространств, сопряженных к сепарабельным. Действительно, каждому фактор-отображению $F : \ell_1 \longrightarrow X$ соответствует сопряженное изометрическое вложение $F^* : X^* \longrightarrow \ell_\infty$.

I.4. В связи с понятием универсальности естественно возникает ряд вопросов. Например: существует ли изометрически универсальный элемент в классе всех сепарабельных рефлексивных пространств? Изящное отрицательное решение этой и аналогичных задач получил Й.Линденштраус [3]. Приведем набросок его доказательства.

I.5. Лемма. Пусть банахово пространство X содержит подпространство, изометричное декартову произведению $\{X \times R_1\}_p$ (R_1 - одномерное пространство, $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Тогда X содержит подпространство, изометричное ℓ_p ($1 \leqslant p < \infty$) или C_0 ($p = \infty$).

I.6. Теорема. Ни один из перечисленных ниже классов банаховых пространств не содержит изометрического элемента:

(I) Все сепарабельные рефлексивные пространства.

(2) Все пространства, чьи сопряженные сепарабельны.

(3) Все сопряженные сепарабельные пространства.

(4) Все сепарабельные существенно не рефлексивные пространства.

Доказательство проведем, например, для случая а). Пусть, вопреки утверждению теоремы, пространство X сепарабельно, рефлексивно и содержит изометрически все сепарабельные рефлексивные пространства. Значит оно содержит подпространство, изометричное $\{X \times R_1\}_1$. Согласно лемме X содержит ℓ_1 и поэтому не рефлексивно. Противоречие.

I.7. В связи с теоремой Линденштрауса представляется целесообразным рассматривать более широкое понятие универсальности - изоморфную универсальность. Будем говорить, что банахово пространство E изоморфно универсально по отношению к некоторому классу банаховых пространств $\mathfrak{M}$, если для любого пространства $X \in \mathfrak{M}$ найдется в E подпространство, изоморфное X. Если при этом $E \in \mathfrak{M}$, скажем, что класс $\mathfrak{M}$ содержит изоморфно универсальный элемент.

В.Шленк [4] и П.Войтащик [5] получили результаты, которые можно сформулировать следующим образом.

I.8. Теорема. Пусть сепарабельное банахово пространство E изоморфно универсально по отношению к классу всех сепарабельных рефлексивных пространств. Тогда E не изоморфно никакому сопряженному пространству, а E^* не сепарабельно.

Следствие. В классах (I), (2), (3) нет изоморфно универсального элемента.

Доказательство теоремы I.8 проводится следующим образом. Каждому сепарабельному банахову пространству X сопоставляется порядковое число $\alpha = \alpha(X)$, обладающее следующими свойствами:

I) если X изоморфно Y, то $\alpha(X) = \alpha(Y)$

2) если Y -подпространство X, то $\alpha(X) \geqslant \alpha(Y)$

3) если X - сопряженное пространство, то $\alpha(X) < \omega_1$

4) если X^* сепарабельно, то $\alpha(X) < \omega_1$

5) для каждого $\alpha < \omega_1$ найдется рефлексивное пространство X такое, что $\alpha(X) \geqslant \alpha$.

Утверждение теоремы вытекает непосредственно из перечисленных свойств инварианта $\alpha(X)$.

I.10. Теорема Шленка-Войтащика порождает ряд новых вопросов. Может ли сепарабельное пространство E, универсальное по отношению к классу всех сепарабельных рефлексивных пространств, быть слабо полным, или свободным от подпространств изоморфных c_0, или от подпространств, изоморфных ℓ_1 и т.п.? Не окажется ли каждое такое E универсальным в классе всех сепарабельных пространств?

I.11. Понятие изоморфно универсального пространства можно уточнить следующим образом. Универсальное банахово пространство E называется λ-универсальным по отношению к классу $\mathfrak{M}$, если для каждого $X \in \mathfrak{M}$ найдется подпространство Y такое, что $d(X,Y) \leqslant \lambda$. Если E λ-универсально при любом $\lambda > 1$, то оно называется почти универсальным. Заметим еще, что 1-универсальность не равносильна изометрической универсальности.

I.12. Теорема. Если E изоморфно универсально по отношению к классу всех сепарабельных рефлексивных пространств, то оно λ-универсально для некоторого $\lambda < \infty$.

Доказательство. Допустим противное: существует последовательность сепарабельных рефлексивных пространств X_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left\{ d(X_n, Y) : Y \subset E \right\} = \infty$$

Образуем пространство

$$X = \left\{ X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \right\}_{\ell_2}$$

Ясно, что X сепарабельно и рефлексивно и

I.13. Универсальность пространств $C(Q)$ использовалась рядом авторов: в одной из теорем И.М.Гельфанда ([6], стр. 237) о связи между слабой и сильной непрерывностью абстрактных функций, в теореме А.И.Маркушевича [7] о существовании в сепарабельном банаховом пространстве полной минимальной системы с тотальной сопряженной, в некоторых теоремах об эквивалентных перенормировках и т.п. Однако, в общем, применения универсальности были не очень многочисленными. Это можно объяснить по крайней мере двумя обстоятельствами.

I.14. Возьмем двумерное банахово пространство $X = \ell_1^{(2)}$ и выделим в нем одномерное подпространство Y, натянутое на координатный орт e_1. В силу универсальности пространства $C[0,1]$ пространство X может быть изометрически вложено в него и притом многими способами. Однако вложение может стать невозможным если потребовать, чтобы при этом подпространство Y отобразилось на наперед данное подпространство $F \subset C[0,1]$ (например, если F натянуто на функцию $x(t) = t$). Таково первое обстоятельство, которое можно назвать "ненаследуемостью универсальности".

I.15. Второе обстоятельство связано со следующей теоремой А.Пелчиньского [8] :

Теорема. Если бесконечномерное подпространство F пространства $C(Q)$ не имеет подпространства, изоморфного c_0, то F не имеет дополнения в $C(Q)$.

Таким образом большая часть подпространств лежит в $C(Q)$ без дополнения, что, естественно, осложняет работу с ними. Это обстоятельство можно назвать "недополняемостью универсальности".

§ 2. Пространства универсального расположения

В 1966 году В.И.Гурарий предпринял попытку так изменить понятие универсальности, чтобы устранить осложнения, отмеченные в п. I.I4. Он построил сепарабельное банахово пространство $\mathcal{G}$, названное им пространством почти универсального расположения, обладающее рядом полезных свойств, которых лишено пространство C. Приводимые ниже определения и факты взяты из [9].

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторый класс банаховых пространств; E – банахово пространство и F – его подпространство, принадлежащее $\mathfrak{M}$.

2.I. Определение. Подпространство F называется подпространством a-универсального расположения $(a \geqslant 1)$ в E относительно $\mathfrak{M}$, если для любой пары пространств H_1 и F_1 (F_1 подпространство H_1, $F_1 \in \mathfrak{M}$, $H_1 \in \mathfrak{M}$, F_1 изоморфно F) и любого изоморфизма $\varphi : F_1 \longrightarrow F$ найдется в E подпространство H $(F \subset H \subset E)$ и изоморфизм $\Phi : H_1 \longrightarrow H$ такой, что: Φ является расширением φ; $\|\Phi\| \leq a\|\varphi\|$, $\|\Phi^{-1}\| \leq a\|\varphi^{-1}\|$. Если F является подпространством a-универсального расположения при любом $a > 1$ (соотв. при $a = 1$), то будем называть F подпространством почти универсального (соотв. универсального) расположения.

2.2. Определение. Пространство E называется пространством a-универсального (соотв. почти универсального, универсального) расположения относительно $\mathfrak{M}$, если:

I) Оно a-универсально (соотв. почти универсально, изометрически универсально) относительно $\mathfrak{M}$.

2) Любое подпространство $F \subset E$, принадлежащее $\mathfrak{M}$, является подпространством a-универсального (соотв. почти универсального, универсального) расположения в E относительно $\mathfrak{M}$.

Основной результат теории универсальности расположения относится к классу $\mathfrak{M}_f$ всех конечномерных нормированных пространств.

2.3. Теорема. Существует сепарабельное банахово пространство $\mathcal{G}$ почти универсального расположения относительно класса $\mathfrak{M}_f$. Пространство $\mathcal{G}$ единственно с точностью до почти изометрии. Не существует сепарабельного банахова пространства универсального расположения относительно $\mathfrak{M}_f$.

2.4. При доказательстве первой части теоремы 2.3 был впервые применен метод, который впоследствии неоднократно (в различных модификациях) применялся как конструирования различных универсальных пространств. Существенными для этого метода являются два обстоятельства: метрическая компактность некоторых множеств нормированных пространств и отображений и возможность "совмещения вложений", выраженная следующей леммой:

2.5. Лемма. Пусть X_1 и X_2 банаховы пространства; Y_1 и Y_2 их подпространства, которые изометричны. Тогда найдется банахово пространство Z и подпространство Y такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & X_1 \arrow[dr, "h_1"] & \\
& Y \arrow[r, "j"] & Z \\
Y_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[ur, "i_2"] & X_2 \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd} \qquad (h_1 X_1 \cap h_2 X_2 = jY)$$

Здесь i_1 и i_2 изометрии, а все операторы j и h – изометрически вложения. Если X_i конечномерны, то и Z можно взять конечномерным.

С помощью этой леммы, начиная с произвольного конечномерного пространства, последовательно "наращивая" его так, чтобы реализовать "почти все" возможные вложения конечномерных пространств друг в друга, получим требуемое пространство $\mathcal{G}$.

2.6. Пространство Гурария обладает рядом дополнительных свойств. Оно является $\mathcal{L}_\infty$-пространством в смысле Линденштрауса-Пелчиньского и следовательно имеет базис. Пространство $\mathcal{G}$ предсопряжено к некоторому $L_1(\mu)$; более того, каждое сепарабельное банахово пространство, предсопряженное к $L_1(\nu)$ (пространство Линденштрауса) изометрично дополняемому подпространству пространства $\mathcal{G}$ [IO]. Наконец, $\mathcal{G}$ не изоморфно никакому дополняемому подпространству пространства $C[0,1]$ [II].

2.7. Неизвестно, существует ли пространство α -универсального расположения в классе всех сепарабельных банаховых пространств. Не существует сепарабельного пространства универсального расположения (без слова "почти") относительно класса $\mathfrak{M}_f$. Доказательство этого факта опирается на теорему Мазура о существовании точек гладкости на сфере сепарабельного банахова пространства.

Пространство Гурария имеет некоторое отношение к известной проблеме Мазура о банаховых пространствах с транзитивной группой изометрий. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

§ 3. Дополняемо универсальные пространства

3.I. Определение. Банахово пространство E называется дополняемо универсальным относительно некоторого класса банаховых пространств $\mathfrak{M}$, если для любого $X \in \mathfrak{M}$ найдется в E подпространство X_1, которое изоморфно X и имеет дополнение в E. Если при этом $E \in \mathfrak{M}$, говорят, что E - дополняемо универсальный элемент в $\mathfrak{M}$.

Тривиальные примеры дополняемо универсальных пространств строятся легко: берем все элементы X_α, образующие класс $\mathfrak{M}$, и устраиваем их декартово произведение $X = \{X_\alpha\}_{\ell_2}$. Очевидно пространство X будет дополняемо универсальным относительно $\mathfrak{M}$. Более того: вложения здесь изометрические, а дополнения ортогональные.

3.2. Первый "настоящий" пример дополняемо универсального пространства привел А.Пелчиньский [I2] в 1969 году. Он построил сепарабельное пространство с базисом $\mathbf{P}$, дополняемо универсальное в классе всех пространств с базисом. Это пространство единственно с точностью до изоморфизма.

3.3. В действительности пространство Пелчиньского еще более замечательно. Оно содержит нормированный базис $\{e_n\}_1^\infty$, обладающий следующим свойством: если X банахово пространство с полунормированным базисом $\{X_k\}_1^\infty$, то найдется подпоследовательность $\{e_{n_k}\} \subset \{e_n\}$ такая, что соответствие $Tx_k = e_{n_k}$ распространяется до

изоморфизма между X и $X_1 = [e_{n_k}]$, причем X_1 имеет дополнение - замыкание линейной оболочки остальных членов базиса.

Таким образом, здесь уместнее говорить о дополняемо универсальном базисе. Метод Пелчиньского построения универсального базиса сходен отчасти с методом Гурария.

3.4. Этот же метод позволил Пелчиньскому построить сепарабельное банахово пространство с безусловным базисом, дополняемо универсальное в классе всех сепарабельных пространств с безусловным базисом. Это пространство $\mathbf{P}_U$ также единственно с точностью до изоморфизма и обладает дополняемо универсальным безусловным нормированным базисом.

3.5. Й.Линденштраус [I3] обнаружил интересную особенность пространства $\mathbf{P}_U$: оно обладает симметричным базисом (разумеется, отличным от того базиса, на котором реализуется дополняемая универсальность). Более того, $\mathbf{P}_U$ обладает несчетным множеством попарно не эквивалентных симметричных базисов.

3.6. М.Ципин [I4] заметил, что пространство $\mathbf{P}_U$ можно получить, исходя из пространства $\mathbf{P}$ с помощью следующего приема. Пусть по-прежнему $\{e_n\}$ - дополняемо универсальный базис в $\mathbf{P}$. Введем в $\mathbf{P}$ новую (более сильную) норму согласно формуле

$$\|x\|_U = \sup_{|\alpha| \leq 1} \|\sum \alpha_n a_n e_n\| \quad (x = \sum a_n e_n)$$

Совокупность тех элементов, для которых $\|x\|_U$ конечна, образует, как нетрудно проверить, пространство $\mathbf{P}_U$. С помощью этого метода "усиления нормы" Ципин установил существование дополняемо универсального базиса в классах всех p -гильбертовых и всех p -бесселевых базисов (при фиксированном p). Напомним, что базис в пространстве Банаха называется p -гильбертовым (p -бесселевым), если для каждого разложения по этому базису выполнено неравенство

$$\|\sum a_n e_n\|^p \leq A \sum |a_n|^p \quad (\text{соотв.} \sum |a_n|^p \leq A \|\sum a_n e_n\|^p).$$

3.7. Отметим еще несколько отрицательных результатов относительно существования дополняемо универсальных базисов. Следующие классы базисов не содержат дополняемо универсального элемента:

а) класс всех натягивающих базисов [I2] ;

б) класс всех ограниченно полных базисов [I4]

в) класс всех базисов в слабо полных пространствах [I4]

г) класс всех базисов гильбертова пространства [I5] .

3.8. Наконец упомянем о теореме несколько реабилитирующей пространство $C[0,1]$: в нем есть нормированный базис, универсальный (не дополняемо) в классе всех полунормированных базисов [I2].

§ 4. Универсальность и аппроксимационные свойства

4.I. В связи с примером Пелчиньского естественно возникает вопрос: существует ли дополняемо универсальное пространство в классе всех банаховых пространств. Отрицательный ответ на этот вопрос означал бы независимое от Энфло отрицательное решение проблемы базиса. Положительный - дал бы нам новый пример сепарабельного банахова пространства без базиса (и даже без аппроксимационного свойства).

Напомним некоторые определения и простейшие факты относительно аппроксимационных свойств.

4.2. Определение. Банахово пространство обладает аппроксимационным свойством $(X \in AC)$, если для каждого компакта $K \subset X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует конечномерный линейный оператор T такой, что:

$$\|x - Tx\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in K.$$

4.3. Определение. Банахово пространство обладает ограниченным аппроксимационным свойством $(X \in OAC)$, если для каждого компакта $K \subset X$ существует $C > 0$ такое, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется конечномерный линейный оператор T такой, что:

$$\|T\| \leq C: \quad \|x - Tx\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in K.$$

Для сепарабельного банахова пространства OAC равносильно существованию последовательности конечномерных линейных операторов, поточечно аппроксимирующий единичный оператор.

4.4. Ясно, что существование базиса влечет наличие OAC, а последнее - наличие AC. Известно [I6], что существует сепарабельное банахово пространство с AC, но без OAC. Неизвестно, существует ли пространство с OAC, но без базиса.

Кроме вопроса 4.I можно поставить по крайней мере два аналогичных вопроса.

4.5. Существует ли дополняемо универсальное пространство в классе всех сепарабельных пространств с OAC ?

4.6. Существует ли дополняемо универсальное пространство в классе всех сепарабельных пространств с AC ?

4.7. В заметке [I7] М.И.Кадец предложил новый способ построения дополняемо универсальных пространств (также родственный методу Гурария). Он построил сепарабельное пространство E, дополняемо универсальное от отношению ко всем сепарабельным пространствам с OAC, но не сумел доказать, что оно само обладает ограниченным аппроксимационным свойством. Это установили Войтащик и Пелчиньский [I8]. Затем Пелчиньский доказал, что E изоморфно пространству P, которое, таким образом оказалось дополняемо универсальным и в классе всех сепарабельных пространств с OAC [I9].

4.8. Этот факт был установлен с помощью следующей теоремы: каждое сепарабельное банахово пространство с OAC погружается изоморфно и с дополнением в некоторое пространство с базисом.

4.9. Теорема 4.8 имеет полезный конечномерный аналог: для любых n и ε найдется $N = N(n, \varepsilon)$ такое, что для каждого n-мерного банахова пространства X найдется N-мерное надпространство Y с "почти монотонным" базисом $\{y_i\}_1^N$ ($\|\sum_1^m \lambda_i y_i\| \leq (1+\varepsilon)\|\sum_1^N \lambda_i y_i\|$ для любых коэффициентов λ_i и любого $m \leq N$), допускающее проектор с единичной нормой на X. В частности, можно положить $\varepsilon = n^{-1/2}$, $N = n^2$.

4.10. С помощью метода заметки [17] были построены дополняемо универсальные пространства в классе всех сепарабельных предсопряженных к L_1 [18] и в классе всех сепарабельных $\mathcal{L}_\infty$-пространств [20].

4.11. Интересный и по-видимому важный пример построил В.Джонсон [21]. Воспроизведем его конструкцию. Пусть $\{X_n\}_1^\infty$ счетное множество конечномерных нормированных пространств, плотное в смысле дистанции Банаха-Мазура в классе всех конечномерных банаховых пространств. Образуем бесконечное декартово произведение этих пространств:

$$C_1 = \{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots\}_{\ell_1}$$

Заметим, что в C_1 есть базис; это устанавливается с помощью теоремы 4.9. Используя тонкие соображения, связанные с неметрической компактностью, Джонсон показал, что сопряженное пространство C_1^* дополняемо универсально в классе всех банаховых пространств, сопряженных к сепарабельным пространствам (сравните с 1.2 - 1.3). Следствием дополняемой универсальности пространства C_1^* является следующее предложение.

4.12. Теорема. Пространство C_1^* не обладает аппроксимационным свойством.

Действительно, пусть E сепарабельное банахово пространство без аппроксимационного свойства (например, пространство Энфло). Тогда по одной теореме Гротендика E^* также не имеет аппроксимационного свойства. Так как E^* изоморфно и с дополнением погружается в C_1^*, то последнее также не имеет АС.

§ 5. Изометрическая универсальность относительно классов конечномерных пространств

5.1. Отвечая на вопрос Мазура (проблема 41 из "Шотландской книги"), Ч.Бессага [22] установил, что никакое конечномерное банахово пространство не является изометрически универсальным по отношению к классу $\mathfrak{M}_2$ всех двумерных нормированных пространств. Более точно:

5.2. Теорема. Никакое n-мерное пространство не является изометрически универсальным по отношению к тем двумерным пространствам, чьи единичные сферы суть $(2n+2)$-угольники ($n = 3, 4, \ldots$). Этот результат точен.

Доказательство теоремы 5.2 опирается на некоторые свойства отображений, удовлетворяющих условию Липшица.

5.3. Линденштраус [23] показал, что изометрически универсальным относительно $\mathfrak{M}_2$ является пространство $L_1[0,1]$. Заметим, что ни ℓ_1 ни c_0 не являются таковыми.

5.4. Наконец, А.Шанковский построил для каждого натурального n сепарабельное пространство $\mathfrak{X}_n$, изоморфное гильбертову, в которое каждое n-мерное банахово пространство вкладывается изометрически и с ортогональным дополнением [24].

Конструкция Шанковского является непосредственной не опирающейся ни на какие сколько-нибудь серьезные факты. Интересной ее особенностью является использование "не выпуклых норм".

Литература

1. S.Banach, S.Mazur, Zur Theorie der linearen Dimension, Studia Math., 4, (1933).
2. A.Pelczynski, On simultaneous extension of continuous functions, Studia Math., 24, (1964), 285-304.
3. Y.Lindenstrauss, Notes on Klee's paper "Polyhedral sections of convex bodies", Isr.J.Math., 4(1966), 235-242.

4. W.Szlenk, The non-existance of a separable reflexive Banach space universal for separable reflexive Banach spaces, Studia Math.,30,(1968), 53-61.

5. P.Wojtaszyk, On separable Banach spaces containing all separable reflexive Banach Spaces, Studia Math.,37, (1971), 197-202.

6. I.M.Gelfand, Abstrakte Functionen und lineare Operatoren

7. А.И.Маркушевич, О базисе в широком смысле слова, ДАН, 4I (I943) 24I - 243.

8. A.Pelczynski, Projectons in certain Banach spaces, Studia Math.,19,(1960), 209-228.

9. В.И.Гурарий. Пространства универсального расположения, изотронные пространства и проблема Мазура о вращении банаховых пространств, Сиб.мат.ж., 7, (I966), I002 - I00I3.

I0. P.Wojtaszczyk, Some remarks on Gurarij space, Studia Math.,41,(1972), 208-210.

II. Y.Benyamini,J.Lindenstrauss, A predual of l_1 which is not isomorphic to a C(K) space,Isr. J.Math.,13,(1972), 246-254.

I2. A.Pelczynski, Universal bases, Studia Math.,32,(1968) 53-61.

I3 Y.Lindenstrauss, A remark on symmetric bases, Isr.J. Math.,13,(1972), 317-320.

I4. M.Zippin, Existence of universal members in certain families of bases of Banach spaces, PAMS,26,(1970), 294-301.

I5. В.И.Гурарий, Некоторые теоремы о базисах в гильбертовом и банаховом пространствах, ДАН, I93, (1970), 974 - 977.

16. T.Figiel, W.B.Johnson, The approximation property does not imply the bounded approximation property, PAMS, 41, (1973), 197-200.

17. M.I.Kadec, On complementably universal Banach spaces, Studia Math., 40, (1971), 85-89.

18. Pelczynski, P.Wojtaszczyk, Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases, Studia Math., 40, (1971), 91-108.

19. A.Pelczynski, Any separable space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis, Studia Math., 40, (1971), 239-243.

✓ 20. M.J.Nielsen, P.Wojtaszczyk, A remark on bases in $\mathcal{L}_p$-spaces with an application to complementable universal $\mathcal{L}_p$-spaces, Bull. Acad. Polon., 21, (1973), 249-254.

21. W.B.Johnson, A complementary universal conjugate Banach space and its relations to the approximation problem, Isr. J. Math., 13, (1972), 301-310.

22. C.Bessaga, A note on universal Banach spaces of a finite dimension, Bull. Acad. Polon., 6, (1958), 97-101.

23. J.Lindenstrauss, On the extension of operators with a finite dimensional range, Illinois J. Math., 8, (1964), 488-499.

24. A.Szankowski, An example of a universal Banach space, Isr. J. Math., 11, (1972), 292-296.

Кадец М.И.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

Технический редактор Т.А.Шандарова

Подписано в печать 14/УШ-1975 г. МН07428
Формат бумаги 60х90 1/16 Объем - 1,2 п.л.
Заказ № 929 Тираж - 200 экз.

Отпечатано на ротапринте ВЦ СО АН СССР
Новосибирск,90