ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 4 (155)

УДК 513.88

М. И. Кадец, Е. В. Токарев

О СОПРЯЖЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ КРАЙНИХ ТОЧЕК НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ

Согласно теореме Крейна — Мильмана и последующим ее обобщениям, единичный шар U^* сопряженного пространства X^* имеет „достаточно много" крайних точек, каково бы ни было банахово пространство X. Линденштраус и Фелпс [1] поставили в связи с этим следующий вопрос: каким должно быть действительное бесконечномерное банахово пространство X, чтобы множество $\operatorname{ext} U^*$ крайних точек единичного шара сопряженного пространства X^* содержало бы возможно меньше элементов. Приведем характерный пример.

Пусть $X = c_0$, тогда $X^* = l_1$; в этом случае счетно не только множество $\operatorname{ext} U^*$, но и его замыкание в w^*-топологии.

Основной результат статьи [1] можно сформулировать в следующем виде.

Теорема А. *Если множество* $\operatorname{ext} U^*$ *счетно, то* X^* *сепарабельно, а* X *не содержит рефлексивных подпространств.*

Ниже мы попытаемся несколько усилить результаты, полученные Линденштраусом и Фелпсом. В дальнейшем, не оговаривая этого особо, будем считать все рассматриваемые пространства действительными и бесконечномерными. Нам потребуется доказанная Джонсоном и Розенталем [2]

Теорема В. *Если* X^{**} *сепарабельно, то* X^* *и* X *содержат рефлексивные подпространства.*

Лемма. *Пусть* X — *банахово пространство, а* Y — *его подпространство. Тогда*

$$F(\operatorname{ext} U^*) \supset \operatorname{ext} V^*, \tag{1}$$

где U^* *и* V^* — *единичные шары сопряженных пространств* X^* *и* Y^* *соответственно, а* F — *каноническое отображение* X^* *на* Y^*.

Теорема 1. *Если* $\operatorname{ext} U^*$ *счетно, то* X^* *сепарабельно,* X^{**} *несепарабельно, а* X *не содержит сопряженных подпространств.*

Доказательство. Первое утверждение содержится в теореме А. Второе непосредственно следует из сопоставления теорем А и В. Допустим теперь, что вопреки третьему утверждению пространство содержит сопряженное подпространство Y^*. Тогда Y^{**} является факторпространством пространства X^*. Из сепарабельности X^* следует сепарабельность Y^{**}. Значит, по теореме В пространство Y^*, а с ним и пространство X содержат рефлексивные подпространства. Доказательство завершается ссылкой на теорему А, согласно которой $\operatorname{ext} U^*$ оказывается несчетным.

Теорема 2. *Для того, чтобы слабое * замыкание множества* $\operatorname{ext} U^*$ *было счетным, необходимо и достаточно, чтобы* X *содержалось в качестве подпространства в каком-нибудь пространстве непрерывных функций* $C(K)$, *где* K — *счетный компакт.*

Доказательство. Пусть слабое * замыкание множества $\operatorname{ext} U^*$ счетно; обозначим его K. Каждый элемент $x \in X$ порождает на полученном счетном компакте непрерывную функцию $\varphi_x(x^*) = (x, x^*)$, причем $\max\limits_{x^* \in K} |\varphi_x(x^*)| = \|x\|$ $(x \in X)$. Отождествляя элементы x с соответствующими функциями φ_x, получаем требуемое изометрическое вложение пространства X в $C(K)$.

Теперь пусть $X \subset C(K)$, где K — счетный компакт. Согласно лемме

$$F(\operatorname{ext} Q^*) \supset \operatorname{ext} U^*, \tag{2}$$

где Q^* — единичный шар пространства $C(K)^*$. Известно (см. [3], с. 478), что множество $\operatorname{ext} Q^*$ слабо компактно и счетно (оно гомеоморфно объединению двух экземпляров компакта K). В силу компактности $\operatorname{ext} Q^*$ можно усилить вложение (2):

$$F(\operatorname{ext} Q^*) \supset \overline{\operatorname{ext} U^*}, \tag{3}$$

где черта означает слабое * замыкание. Включение (3), очевидно, влечет счетность $\overline{\operatorname{ext} U^*}$.

В статье [1] было высказано предположение, что счетность множества $\operatorname{ext} U^*$ влечет совпадение в пространстве X^* слабой и сильной сходимостей. Это предположение опровергается следующими примерами.

Пример 1. В качестве X возьмем пространство $M_0(c)$ (пространство Марцинкевича). Пространством, сопряженным к $M_0(c)$, является пространство Лоренца $\Lambda(c)$ (определение этих пространств см., напр., в [4]). В [4] показано, что множество $\operatorname{ext} U^*$ лежит среди точек вида $(\pm e_{i_1} \pm e_{i_2} \pm \ldots \pm e_{i_n})/s_n$, где s_n — фундаментальная последовательность пространства $\Lambda(c)$, $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\Lambda(c)$, $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — некоторая выборка из натурального ряда, а $n = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что w^* — замыкание множества $\operatorname{ext} U^*$ — лежит среди точек вида $(\pm e_{i_1} \pm e_{i_2} \pm \ldots \pm e_{i_n})/s_m$ $(m \geqslant n)$ и, тем самым, счетно, хотя в $\Lambda(c)$ сильная сходимость не совпадает со слабой. Из счетности $\overline{\operatorname{ext} U^*}$, в частности, следует, что $M_0(c)$ изометрически вкладывается в пространство непрерывных функций $C(Q)$ на счетном компакте Q (согласно теореме 2).

Пример 2. В качестве X можно взять также построенное в [5] пространство числовых последовательностей $x = \{\xi_n\}$, при которых

$$A_k(x) = \sup \left| \sum_{j=1}^{k+1} \xi_{i_j} \right| \to 0, \qquad k \to \infty,$$

где верхняя грань берется по всем наборам из $k+1$ целых чисел таких, что $k = i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1}$. Норма в X определяется равенством

$$\|x\|_X = \sup_k A_k(x) \quad (1 \leqslant k < \infty).$$

В [5] показано, что X изометрически вкладывается в пространство непрерывных функций $C(K)$ на счетном компакте K, а в X^* слабая сходимость не совпадает с сильной. Из теоремы 2 следует, что счетно не только само множество $\operatorname{ext} U^*$, но и его слабое * замыкание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindenstrauss J., Phelps R. Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces. Israel J. math., v. 6, № 1, 1968, p. 39—48.

2. Johnson W. B., Rosenthal H. P. On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces. Studia Math., t. 43, № 1, 1972, s. 77—92.

3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИИЛ, 1962.

4. Токарев Е. В. Об одном вопросе Линденштрауса и Фелпса. Функц. анализ и его прилож., т. 7, вып. 3, 1973, с. 96.

5. Pelczyński A., Szlenk W. An example of â non—shrinking basis. Rev. Roumaine Math. pures et appl., v. 10, № 7, 1965, s. 961—966.

г. Харьков

Поступила
3 XII 1973