47 (43)

ცალკე ამონაბეჭდი
Отдельный оттиск

საქართველოს სსრ
მეცნიერებათა აკადემიის
მოამბე

СООБЩЕНИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
ГРУЗИНСКОЙ ССР

BULLETIN
OF THE ACADEMY OF SCIENCES
OF THE GEORGIAN SSR

74, № 3, ივნისი, 1974

ᲡᲐᲥᲐᲠᲗᲕᲔᲚᲝᲡ ᲡᲡᲠ ᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲔᲑᲐᲗᲐ ᲐᲙᲐᲓᲔᲛᲘᲘᲡ ᲛᲝᲐᲛᲑᲔ, 74, № 3, 1974
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, 74, № 3, 1974
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, 74, № 3, 1974

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

М. И. КАДЕЦ

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ КОНСТАНТАХ И ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ З. А. ЧАНТУРИЯ

(Представлено членом-корреспондентом Академии Б. В. Хведелидзе 2.10.1973)

Относительной проекционной константой подпространства Y в банаховом пространстве X называется нижняя грань норм проекторов из X на Y:

$$\lambda(Y;\ X) = \inf\|P\| \quad (P: X \to X;\quad \operatorname{Im} P = Y;\quad P^2 = P).$$

Если подпространство не допускает на себя проектор из X, то полагают $\lambda(Y;\ X)=\infty$. Если подпространство конечномерно, то, как показано в [1], всегда существует проектор на это подпространство, такой, что

$$\lambda(Y;\ X) \leqslant \|P\| \leqslant \sqrt{\dim Y}. \tag{1}$$

Оценка, аналогичная (1), имеет место и для подпространств конечной коразмерности [2]:

$$\lambda(Y;\ X) \leqslant \sqrt{\operatorname{codim} Y} + 1. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть Y и Z—конечномерные подпространства банахова пространства X, причем $Z \subset Y$, $\dim Z = m$, $\dim Y = n$. Тогда*

$$\frac{\lambda(Z;\ X)}{\lambda(Y;\ X)} \leqslant \sqrt{n-m} + 1; \qquad \frac{\lambda(Y;\ X)+1}{\lambda(Z;\ X)+1} \leqslant \sqrt{n-m} + 1 \tag{3}$$

Доказательство. Пусть P—произвольный проектор из X на Y, Q—проектор из Y на Z. Тогда их произведение $R=QP$ проектирует X на Z. Имеем $\|R\| \leqslant \|Q\| \cdot \|P\|$, откуда по определению проекционной константы

$$\lambda(Z,\ X) \leqslant \lambda(Z;\ Y) \cdot \lambda(Y;\ X). \tag{4}$$

Согласно оценке (2) получаем

$$\lambda(Z;\ Y) \leqslant \sqrt{n-m} + 1. \tag{5}$$

Сопоставляя (4) и (5), получаем первое из неравенств (3).

Перейдем к установлению второго неравенства. Пусть теперь R — произвольный проектор из X на Z, а Q — проектор из $\operatorname{Ker} R$ на $\operatorname{Ker} R \cap Y$. Образуем оператор

$$P = R + Q(I - R).$$

Нетрудно убедиться в том, что P проектирует X на Y. Его норма допускает оценку

$$\|P\|+1 \leqslant (\|Q\|+1)(\|R\|+1).$$

Обращаясь опять к определению проекционной константы, получаем

$$\lambda(Y;\ X)+1 \leqslant (\lambda(\operatorname{Ker} R \cap Y;\ \operatorname{Ker} R)+1)(\lambda(Z;\ X)+1).$$

Так как $\dim(\operatorname{Ker} R \cap Y) = n-m$, то из последнего неравенства и оценки (1) получаем второе из неравенств (3).

Полученные неравенства могут иметь применение к задачам конструктивной теории функций. Приведем один пример такого применения.

З. А. Чантурия [3] установил следующий результат, усиливающий известную теорему Фабера (см. [4], стр. 323, подстрочное примечание).

Теорема Чантурия. Не существует последовательности алгебраических полиномов $\{P_m(t)\}_0^\infty$, образующей базис в пространстве $C[0;\ 1]$ и такой, что степень полинома $P_m(t)$ не превосходит $\mu_m = m+\omega(m)$, где $\omega(m) = o(\ln m)$.

Теорема 2. *Утверждение теоремы Чантурия остается верным, если положить*

$$\omega(m) = o(\ln^2 m). \tag{6}$$

Доказательство. Допустим, что последовательность полиномов $\{P_k(t)\}_0^\infty$ образует базис в $C[0;\ 1]$. Обозначим через Z_m линейную оболочку первых m элементов этого базиса ($m = 1,\ 2, \ldots$). Обозначим, далее, через Y_m линейную оболочку степеней $\{t^\nu\}_0^n$, где $n = n(m)$ — наибольшая степень полинома из Z_m, так что $Z_m \subset Y_m$. Хорошо известно, что

$$\lambda(Y_m;\ C[0;\ 1]) \sim \frac{2}{\pi}\ln n. \tag{7}$$

Применим второе из неравенства (3) к пространству $C[0;\ 1]$ и подпространствам Z_m и Y_m:

$$\frac{\lambda(Y_m,\ C)+1}{\lambda(Z_m,\ C)+1} \leqslant \sqrt{n-m}+1. \tag{8}$$

Так как последовательность $\{P_k(t)\}$ — базис, то $\lambda(Z_m,\ C) \leqslant A < \infty$. Объединяя последнее неравенство с (7) и (8), получаем

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n-m}} \leqslant A_1 < \infty \quad (m = 1,\ 2, \ldots;\quad n = n(m)). \tag{9}$$

Поскольку, согласно условию теоремы,

$$n-m = \omega(m) = o(\ln^2 m),$$

то неравенство (9) перестает выполняться начиная с некоторого значения m. Полученное противоречие показывает, что система полиномов $\{P_k(t)\}_0^\infty$ не является базисом.

В приведенном доказательстве специфика пространства $C[0; 1]$ и системы полиномов полностью исчерпывается оценкой функции Лебега (7). Ясно, что из теоремы 1 могут получаться и другие аналогичные предложения, относящиеся к другим функциональным пространствам и другим системам функций.

Харьковский институт инженеров
коммунального строительства

(Поступило 4.10.1973)

მათემატიკა

მ. კადეცი

ფარდობითი პროექციული მუდმივებისა და ზ. ჭანტურიას ერთი თეორემის შესახებ

რეზიუმე

ფარდობითი პროექციული მუდმივების შეფასებების გამოყენებით გაძლიერებულია ზ. ჭანტურიას ერთი თეორემა.

MATHEMATICS

M. I. KADETS

ON RELATIVE PROJECTION CONSTANTS AND ON ONE THEOREM OF Z. A. CHANTURIA

Summary

Estimation of relative projection constants are applied in order to strengthen one theorem of Z. A. Chanturia.

ლიტერატურა — ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1. М. И. Кадец, М. Г. Снобар. Матем. заметки, 10, № 4, 1971, 453—458.
2. D. J. H. Garling, Y. Gordon. Relations between some constants associated with finite dimensional Banach spaces. Israel J. Math., 9, 1971, 346—361.
3. З. А. Чантурия. Матем. заметки, 2, № 2, 1967, 187—190.
4. Математика за 40 лет, т. I. М., 1959.