О СЛАБО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Д. Б. Димитров, М. И. Кадец

Определение Г. Бора (равно как и эквивалентное ему определение С. Бохнера) почти периодической функции переносится без изменений на функции со значениями в банаховом пространстве. Функция $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в банаховом пространстве X называется сильно почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется относительно плотное множество ее ε-почти периодов $\{t_n\}_{-\infty}^{\infty}$, т. е.

$$\sup_t \| f(t+t_n) - f(t) \| < \varepsilon, \quad \sup_t \min_n | t - t_n | < l(\varepsilon) < \infty.$$

Сильно почти периодические функции по многим своим свойствам близки к числовым п. п. функциям, хотя бесконечномерность X порождает определенные различия [1—4]. Значительно больше отличаются от числовых п. п. функций слабо почти периодические (в дальнейшем с. п. п.) функции. Функция $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в банаховом пространстве X называется слабо (или скалярно) почти периодической, если для каждого линейного функционала $x^* \in X^*$ числовая функция

$$\varphi(t) = \langle x^*, f(t) \rangle$$

является боровской п. п. функцией. Каждая сильно почти периодическая функция является с. п. п. функцией; обратное, вообще говоря, неверно. Множество значений с. п. п. функции ограничено и сепарабельно, но не обязательно слабо компактно [2, 5]. Сепарабельнозначность с. п. п. функции позволяет ограничиться рассмотрением лишь сепарабельных пространств, что и будет сделано в дальнейшем.

Многие свойства, которыми не обладают с. п. п. функции со значениями в произвольном банаховом пространстве, оказываются справедливыми для функщий со значениями в банаховых пространствах определенного класса (рефлексивных, слабо полных и т. п.). Будем изучать именно такие свойства, указывая каждый раз максимально широкий класс банаховых пространств.

Для каждого действительного λ мы можем определить коэффициент Фурье a_λ с. п. п. функции $f(t)$:

$$\langle a_\lambda, x^*\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \langle x^*, f(t)\rangle e^{-i\lambda t}\,dt; \quad x^* \in X^*.$$

Нетрудно видеть, что a_λ — линейный непрерывный функционал, определенный на $X^*: a_\lambda \in X^{**}$. Более точно, a_λ принадлежит слабому секвенциальному замыканию $K(X)$ пространства X в X^{**}. Множество показателей λ, для которых $a_\lambda \neq 0$, назовем, как обычно, спектром с. п. п. функции. Ту часть спектра, которая соответствует коэффициентам Фурье, лежащим в X (вне X), назовем внутренним (соответственно внешним) спектром. Неизвестно, существуют ли с. п. п. функции с несчетным спектром. Как показал Л. Америо [5], каждая с. п. п. функция со значениями в слабо полном банаховом пространстве имеет не более чем счетный спектр. Его доказательство непосредственно переносится на любые B-пространства, если только все a_λ лежат в сепарабельной части $K(X)$.

Если спектр с. п. п. функции счетен, можно обычным образом превратить числовую ось в предкомпактную метрическую группу Ω_f, на которой функция $f(t)$ будет слабо равномерно непрерывна. Пополнив Ω_f, получим компактную метрическую группу G (боровский компакт). Функцию $f(t)$ можно по непрерывности доопределить на G, но при этом множество ее значений, вообще говоря, выйдет за пределы пространства X, так что получится слабо* непрерывная функция $\bar{f}(g)$ $(g \in G)$ со значениями в $K(X)$.

Теорема 1. *Для того чтобы каждая с. п. п. функция со значениями в банаховом пространстве X была сильно почти периодической, необходимо и достаточно, чтобы в X совпадали слабая и сильная сходимости.*

Доказательство. Пусть в X существует слабо, но не сильно сходящаяся последовательность $\{x_j\}_1^\infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность слабо сходится к нулю и $\|x_j\| = 1$. Построим последовательность числовых периодических функций $\varphi_j(t)$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} |\sin \pi t| & \text{при } 2^j(2n+1) - 1 \leqslant t \leqslant 2^j(2n+1), \quad (n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{при остальных } t \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Заметим, что при каждом значении t не более чем одна из построенных функций отлична от нуля. Рассмотрим функцию $f(t)$, определяемую сильно сходящимся рядом

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \varphi_j(t).$$

Легко видеть, что для любого $x^* \in X^*$ ряд

$$\langle x^*, f(t)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle x^*, x_j\rangle \varphi_j(t)$$

сходится равномерно и, следовательно, $\langle x^*, f(t)\rangle$ — почти периодическая функция. Значит, $f(t)$ — с. п. п. функция. С другой стороны, $f(t)$ не является сильно почти периодической функцией, так как множество ее значений не сильно компактно (оно содержит слабо, но не сильно сходящуюся последовательность x_j).

Пусть теперь в X совпадают слабая и сильная сходимости. Это, в частности, означает, что X слабо секвенциально полно, т. е. $X = K(X)$. Пусть $f(t)$ — с. п. п. функция, а $\bar{f}(g)$ — ее слабо непрерывное расширение на боровский компакт G. В силу совпадения слабой и сильной сходимостей функция $\bar{f}(g)$ сильно непрерывна на G и, следовательно, $f(t)$ сильно почти периодична.

Пространствами, в которых совпадают слабая и сильная сходимости являются, например, пространство l_1 и пространство $B(l_\infty, l_1)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих из l_∞ в l_1 [6].

Теорема 2. *Если X слабо секвенциально полно, то множество значений каждой с. п. п. функции со значениями в X относительно слабо компактно. В противном случае найдется с. п. п. функция, множество значений которой не будет относительно слабо компактным.*

Доказательство. Первая часть теоремы фактически уже доказана: слабое замыкание множества значений $f(t)$ совпадает с множеством значений слабо непрерывной функции $\bar{f}(g)$ $(g \in G)$, которое слабо компактно. Пусть теперь X не слабо полно. Это означает, что найдется последовательность x_n, такая что для всех $x^* \in X^*$:

$$\lim_{n\to\infty} \langle x^*, x_n \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle; \quad x^{**} \in X.$$

Определим слабо* непрерывную функцию $F(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$:

$$F(s) = \begin{cases} x_n(1-h) + x_{n+1}h \ \text{ при } s = \dfrac{n-1}{n}(1-h) + \dfrac{n}{n+1}h \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0 \leqslant h \leqslant 1,\ n = 1, 2, \ldots) \\ x^{**} \ \text{ при } s = 1. \end{cases}$$

С ее помощью построим нужную с. п. п. функцию со значениями в X:

$$f(t) = F(|\sin t \cdot \sin \sqrt{2}t|) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Множество ее значений не слабо компактно, так как содержит последовательность $\{x_n\}_1^\infty$.

Изучим теперь внешний и внутренний спектры с. п. п. функции.

Теорема 3. *Если λ_0 — изолированная точка спектра с. п. п. функции $f(t)$, то соответствующий коэффициент a_{λ_0} принадлежит пространству X.*

Доказательство. Пусть интервал $J_\delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ не содержит точек спектра, отличных от λ_0. Возьмем числовую функцию $\psi(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, преобразование Фурье которой $\bar{\psi}(\lambda)$ равно нулю вне J_δ и $\bar{\psi}(\lambda_0) = 1$. Рассмотрим свертку функций $f(t)$ и $\psi(t)$:

$$f_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau.$$

Нетрудно проверить, что значения функции $f_\delta(t)$ принадлежат X и что $f_\delta(t) = a_{\lambda_0} e^{i\lambda_0 t}$. Теорема доказана.

Пример 1. Существует с. п. п. функция со значениями в банаховом пространстве c_0, внутренний спектр которой пуст. Возьмем произвольное счетное множество Λ действительных чисел $\{\lambda_m\}_1^\infty$ без изолированных точек. Для каждой точки $\lambda_m \in \Lambda$ выберем во множестве Λ подпоследовательность $\Lambda_m = \{\lambda_{mn}\}_1^\infty$, сходящуюся к λ_m:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{mn} = \lambda_m; \ \Lambda_p \cap \Lambda_q = \varnothing \ (p \neq q), \ \lambda_{mn} \neq \lambda_m.$$

Пространство c_0 нам удобнее представить как пространство двойных числовых последовательностей:

$$x = \{\xi_{mn}\}_{m,\ n=1}^{\infty};\ \lim_{m+n\to\infty} \xi_{mn} = 0;\ \|x\| = \max_{m,\ n} |\xi_{mn}|.$$

Функцию $f(t) = \{\xi_{mn}(t)\}$ без внутреннего спектра можно определить так:

$$\xi_{mn}(t) = \frac{1}{m}(e^{i\lambda_m t} - e^{i\lambda_{mn} t})\ m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Действительно, пусть λ_m принадлежит (не принадлежит) одному из множеств $\Lambda_p : \lambda_m = \lambda_{pq}$. Тогда, как нетрудно проверить, a_{λ_m} имеет проекции

$$\xi_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{m} \text{ для } \mu = m,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots \\ -\frac{1}{p} \text{ (соотв. 0) для } \mu = p,\ \nu = q \\ 0 \quad \text{для остальных } \mu,\ \nu \end{cases}$$

и, значит, лежит вне c_0, так как $\xi_{\mu\nu}$ не стремится к нулю. Нам неизвестно, существует ли класс банаховых пространств (более широкий, чем класс слабо полных пространств), такой что для каждой с. п. п. функции со значениями в пространстве из этого класса внешний спектр пуст.

Рассмотрим еще вопрос о ряде Фурье с. п. п., функций с линейно независимым спектром.

Теорема 4. *Пусть $f(t)$ — с. п. п. функция со значениями в пространстве X, не содержащем подпространства, изоморфного c_0. Пусть спектр $f(t)$ линейно независим, а внешний спектр содержит лишь конечное число точек. Тогда ряд Фурье этой функции безусловно сходится к $f(t)$ по норме пространства X. Отсюда, в частности, следует сильная почти периодичность $f(t)$.*

Доказательство. По теореме об абсолютной сходимости ряда Фурье [7, стр. 73] для каждого $x^* \in X^*$ абсолютно сходится числовой ряд

$$\langle x^*,\ f(t)\rangle = \sum_{\lambda} \langle x^*,\ a_\lambda\rangle e^{i\lambda t}.$$

Так как X не содержит c_0, то по теореме А. Пелчиньского [8] ряд $\sum_{\lambda} a_\lambda e^{i\lambda}$ сходится безусловно, а значит, и равномерно по t. Поэтому его сумма — сильно почти периодическая функция.

Покажем, что от ограничения на X освободиться нельзя.

Пример 2. Рассмотрим функцию со значениями в c_0

$$f(t) = \{1 - e^{i\lambda_1 t},\ 1 - e^{i\lambda_2 t},\ \ldots\},\ \lambda_n = \pi^{-n}.$$

Это с. п. п. функция с линейно независимым спектром. Все коэффициенты Фурье, кроме одного, принадлежат пространству c_0:

$$a_0 = \{1,\ 1,\ 1,\ \ldots\} \bar{\in} c_0;\ a_n = \{\underbrace{0,\ 0,\ \ldots\ 0}_{n},\ -1,\ 0,\ \ldots\} \in c_0.$$

Однако ряд Фурье $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ сильно расходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bochner. Abstracte fastperiodische Funktionen. Acta Math., **61**, (1933) 149—184.

2. L. Amerio. Abstract almost-periodic functions and functional equations. Boll. della unione math. Italia. Bologna, **20**, (1965) № 8.

3. I. K o p e ć. On vector — valued almost periodic — functions. Ann. soc. Polon. math., (1952) 25.
4. M. И. K а д е ц. Об интегрировании почти периодических функций со значениями в пространстве Банаха. «Функц. анал. и прилож.», 3, 1969, № 3.
5. L. A m e r i o. Funzioni debolmente duase—periodiche. Rend. univ. Padova, 30, (1960) № 2.
6. S. K w a p i e n, A. P e l c z y n s k i. The main triangle projection in matrix spaces and its application. Stud. Math., (1970) 34.
7. Б. М. Л е в и т а н. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1953.
8. A. P e l c z y n s k i. On B — spaces containing subspaces isomorphic to the spaces c_0. Bull. de l'Acad. Polon sci, 5, (1957) № 8.

Поступила 6 апреля 1971 г.