МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 10, № 4 (1971), 453—458

УДК 513.88

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ НА КОМПАКТЕ МИНКОВСКОГО

М. И. Кадец, М. Г. Снобар

Получены точные в смысле порядка оценки для проекционной и макфейловской констант произвольного n-мерного банахова пространства: $1 \leqslant \lambda(X) \leqslant \sqrt{n}$, $1/n \leqslant \mu_1(X) \leqslant 1/\sqrt{n}$. Библ. 8 назв.

Совокупность всех n-мерных банаховых пространств можно метризовать с помощью расстояния Банаха — Мазура (см. [1], стр. 216):

$$\rho(X; Y) = \ln d(X; Y), \quad d(X; Y) = \inf_T \|T\| \|T^{-1}\|, \tag{1}$$

где T пробегает все изоморфизмы X на Y. Полученное метрическое пространство компактно. Будем называть его компактом Минковского и обозначать $\mathfrak{M}_n$.

Пусть Z — произвольное банахово пространство, X — его подпространство. Определим относительную проекционную константу

$$\lambda(X; Z) = \inf \| P \|,$$

где P пробегает все проекторы из Z на X. Определим теперь (абсолютную) проекционную константу [2]:

$$\lambda(X) = \sup_z \lambda(X; Z), \tag{2}$$

где Z пробегает все банаховы пространства, содержащие X в качестве подпространства. Верхняя грань в (2) достигается, если в качестве Z взять $C(Q)$ — пространство всех непрерывных функций, определенных на каком-нибудь компакте Q

$$\lambda(X) = \lambda(X;\ C(Q)) \qquad (X \subset C(Q)). \tag{3}$$

Макфейловские константы определяются так:

$$\mu_p(X) = \inf_{\{x_i\}} \sup_{\alpha_i = \pm 1} \left\| \sum \alpha_i x_i \right\|, \tag{4}$$

где нижняя грань берется по всем конечным подмножествам $\{x_i\} \subset X$, подчиненным условию

$$\sum \|x_i\|^p = 1 \qquad (p \geqslant 1).$$

Проекционные константы находят применение при оценке массивности компактов в банаховом пространстве и соответственно в теории вполне непрерывных операторов (см. [3], стр. 206—208, где по существу использована оценка $\lambda(X) \leqslant n$). Константы $\mu_p(X)$ возникли в связи с изучением безусловно сходящихся рядов.

Для некоторых пространств эти константы вычислены. Например,

$$\lambda(l_1^{(n)}) = \frac{(2k-1)\,\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k)}, \quad k = \left[\frac{n+1}{2}\right] \ [4],\ [2],$$

$$\lambda(l_2^{(n)}) = \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \quad [4],\ [2],\ [5],$$

$$\lambda(l_\infty^{(n)}) = 1, \quad \lambda(X) > 1\ (X \neq l_\infty^{(n)}) \quad (\text{см. [6], стр. } 160),$$

$$n\mu_1(l_\infty^{(n)}) = \lambda(l_\infty^{(n)}), \quad n\mu_1(l_2^{(n)}) = \lambda(l_2^{(n)}) \quad [5].$$

В этой заметке мы докажем такие неравенства:

$$1 \leqslant \lambda(X) \leqslant \sqrt{n}, \quad \frac{1}{n} \leqslant \mu_1(X) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (X \in \mathfrak{M}_n). \tag{5}$$

Раньше были известны менее точные оценки:

$$1 \leqslant \lambda(X) \leqslant \frac{\lambda(l_2^{(n)})}{\sqrt{n}}\, n \ [2], \quad \frac{\lambda(l_2^{(n)})}{n\sqrt{n}} \leqslant \mu_1(X) \leqslant \frac{4}{\sqrt[4]{n}} \ [5].$$

Оценка сверху для $\lambda(X)$. Пусть U^* — единичный шар сопряженного пространства X^*. В пространстве $C(U^*)$ рассмотрим подпространство $L(U^*)$ линейных однородных функций. Каждая такая функция задается формулой

$$F(f) = (f;\ x_0), \ \|F\| = \|x_0\| \qquad (f \in U^*,\ x_0 \in X),$$

что позволяет отождествить $L(U^*)$ с X. Согласно (3) норма любого проектора, отображающего $C(U^*)$ на X, оценивает сверху $\lambda(X)$. Таким образом, задача сводится к удачному выбору проектора.

Мы воспользуемся одним предложением Ф. Джона [7]. В несколько модифицированном виде оно гласит:

ЛЕММА. *Для любого $X \in \mathfrak{M}_n$ существует линейный оператор $T\colon X \to l_2^{(n)}$, обладающий следующими свойствами: $\|T^{-1}\| = 1$; существуют элементы $\{y_r\}_1^s \subset l_2^{(n)}$ и положительные числа $\{\lambda_r\}_1^s$ $\left(n \leqslant s \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\right)$ такие, что $\|y_r\| = \|T^{-1}y_r\| = \|T^*y_r\| = 1$. Для любых $u, v \in l_2^{(n)}$ справедливо тождество*

$$\sum_{r=1}^{s} \lambda_r (y_r,\ u)(y_r,\ v) = (u;\ v), \tag{6}$$

из которого, в частности, следует $\sum \lambda_r = n$.

Нужный нам проектор определим формулой

$$PF = \sum_{r=1}^{s} \lambda_r F(T^* y_r)\, T^{-1} y_r \qquad (F \in C(U^*)). \tag{7}$$

Нетрудно убедиться в том, что он действительно отображает $C(U^*)$ на $L(U^*) = X$. Покажем, что оператор P оставляет на месте каждый элемент из X. Возьмем функцию $F_0(f) = (f;\ x_0) \in L(U^*)$ и применим к ней оператор P:

$$PF_0 = \sum_{r=1}^{s} \lambda_r (T^* y_r;\ x_0)\, T^{-1} y_r = \sum_{r=1}^{s} \lambda_r (y_r;\ Tx_0)\, T^{-1} y_r.$$

Подействуем на PF_0 произвольным линейным функционалом $\varphi \in X^*$ и воспользуемся соотношением (6):

$$(PF_0;\ \varphi) = \sum_{r=1}^{s} \lambda_r (y_r;\ Tx_0)(T^{-1} y_r;\ \varphi) =$$
$$= \sum_{r=1}^{s} \lambda_r (y_r;\ Tx_0)(y_r;\ T^{*-1}\varphi) =$$
$$= (Tx_0;\ T^{*-1}\varphi) = (x_0,\ \varphi) = F_0(\varphi),$$

т. е. $PF = F$ для всех $F \in L(U^*)$. Итак, оператор P действительно проектирует $C(U^*)$ на X. Оценим норму проектора P:

$$\|P\| = \sup_{|F(f)|\leqslant 1} \sup_{\|f\|\leqslant 1} \left| \sum_r \lambda_r F(T^* y_r)(T^{-1}y_r; f) \right|.$$

Так как $\|T^* y_r\| = 1$, мы можем положить $F(T^* y_r) = \operatorname{sign}(T^{-1}y_r; f)$;

$$\|P\| = \sup_f \sum \lambda_r |(T^{-1}y_r; f)| =$$

$$= \sup_f \sum \lambda_r |(y_r; T^{*-1}f)| \leqslant \sup_f \sqrt{\sum \lambda_r} \sqrt{\sum \lambda_r (y_r; T^{*-1}f)^2}.$$

Согласно (6)

$$\|P\| \leqslant \sqrt{n} \sup_f \|T^{*-1}f\| = \sqrt{n}\|T^{-1}\| = \sqrt{n}.$$

Значит, $\lambda(X) \leqslant \sqrt{n}$ для всех $X \in \mathfrak{M}_n$. Как показывает пример $l_2^{(n)}$, эта оценка близка к окончательной.

Оценка сверху для $\mu_1(X)$. Как показано в [8], константы $\lambda(X)$ и $\mu_1(X)$ связаны соотношением

$$n\mu_1(X) \leqslant \lambda(X),$$

откуда немедленно получается, что $\mu_1(X) \leqslant n^{-\frac{1}{2}}$.

Оценка снизу для $\mu_1(X)$. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, найдем множество $\{x_i\}_1^m \subset X$, для которого

$$\mu_1(X) \geqslant \frac{\max\limits_{\alpha=\pm 1} \left\| \sum \alpha_i x_i \right\|}{\sum \|x_i\|} - \varepsilon. \tag{8}$$

Разложим векторы x_i по базису Ауэрбаха (см. [1], стр. 213):

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \quad \max_j |a_{ij}| \leqslant \|x_i\| \leqslant \sum_j |a_{ij}| \qquad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Оценим снизу числитель в правой части (8):

$$\max_{\alpha_i=\pm 1} \left\| \sum_i \alpha_i \sum_j a_{ij} e_j \right\| = \max_{\alpha_i=\pm 1} \max_j \left| \sum_i \alpha_i a_{ij} \right| = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Оценим сверху знаменатель:

$$\sum \|x_i\| = \sum_i \left\| \sum_j a_{ij} e_j \right\| \leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Таким образом,

$$\mu_1(X) \geqslant \frac{\max\limits_j \sum_i |a_{ij}|}{\sum_j \sum_i |a_{ij}|} - \varepsilon \geqslant \frac{1}{n} - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем $\mu_1(X) \geqslant n^{-1}$. Эта оценка точна, так как $\mu_1(l_\infty^{(n)}) = n^{-1}$.

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

Харьковский государственный университет им. Горького

Поступило 20.IV.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Глазман И. М., Любич Ю. И., Конечномерный линейный анализ, М., 1969.
[2] Grünbaum B., Projection constants, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 451—465.
[3] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, М., 1967.
[4] Даугавет И. К., Некоторые приложения обобщенного тождества Марцинкевича — Бермана, Вестник ЛГУ, 19, № 4 (1968), 59—64.
[5] Rutovitz D., Some parameters associated with finite-dimensional Banach spaces, J. London Math. Soc., 40 (1965), 241—255.
[6] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, М., 1961.
[7] John F., Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, In «Studies and essays», Courant anniversary volume, K. O. Friderics a. o. ed., N. Y. (1948), 187—204.
[8] Gordon Y., On the projection and Macphail constants of l^p spaces, Israel. J. Math., 6, № 3 (1968), 295—302.