33 (31) РЖМат 1966 8Б409

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1966

том 167, № 1

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 1

УДК 513.88:513.83

МАТЕМАТИКА

М. И. КАДЕЦ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВСЕХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 1 XI 1965)

В этой заметке доказана

Теорема. *Все сепарабельные пространства Банаха гомеоморфны.*

Таким образом получен утвердительный ответ на вопрос, поставленный М. Фреше [1] в 1928 г. и С. Банахом [2] в 1932 г.

Ч. Бессага и А. Пелчинский [3] показали, что если сепарабельное банахово пространство E содержит подпространство X, гомеоморфное l_2, то оно само также гомеоморфно l_2. Хорошо известно, что каждое бесконечномерное банахово пространство содержит бесконечномерное подпространство с базисом. Значит, согласно теореме Бессаги — Пелчинского, достаточно установить гомеоморфизм всех банаховых пространств с базисом.

Предложение 1. *Пусть X — банахово пространство с базисом $\{e_k\}_1^\infty$; сопряженную базису систему обозначим $\{f_k\}_1^\infty$ ($f_k \in X^*$). Пусть, далее, норма пространства подчинена следующему требованию: если*

√ a монотонность базиса?

$$\|x_\nu\| = \|x\| = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \qquad \lim_{\nu\to\infty} f_n(x_\nu) = f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x_\nu - x\| = 0.$$

Допустим еще, что на единичном шаре U пространства X определен функционал $F(x)$, обладающий следующими свойствами:

1. *Функционал $F(x)$ непрерывен.*
2. *$F(x) > 0$ при $\|x\| < 1$; $F(x) = 0$ при $\|x\| = 1$; $F(\theta) = 1$.*
3. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} F(S_n) = 0 \quad \left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right), \tag{1}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ сходится.

4. *При фиксированных n и a_k ($k < n$) функция $\psi(\alpha) = F(S_{n-1} + \alpha e_n)$ строго возрастает при $\alpha < 0$ и строго убывает при $\alpha > 0$.*

Тогда пространство X гомеоморфно пространству l_2.

Доказательству предложения 1 предпошлем две леммы. Отнесем каждому нормированному элементу $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e_k$ пару числовых последовательностей:

$$\gamma_0(x) = 1; \quad \gamma_n(x) = F(S_n x) \quad \left(S_n x = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k,\ n = 1, 2, \ldots\right),$$

$$\theta_n(x) = \operatorname{sign} f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что

$$1 \geqslant \gamma_1(x) \geqslant \gamma_2(x) \geqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n(x) = 0.$$

Лемма 1. *Нормированная последовательность x_ν сходится к элементу x в том и только том случае, если*
$\lim\limits_{\nu\to\infty}\theta_n(x_\nu)[\gamma_{n-1}(x_\nu)-\gamma_n(x_\nu)]=\theta_n(x)[\gamma_{n-1}(x)-\gamma_n(x)]\quad(n=1,2,\ldots)$.

Лемма 2. *Какова бы ни была пара числовых последовательностей $\{\gamma_k\}_1^\infty$ и $\{\theta_k\}_1^\infty$, подчиненная условиям*

$$1\geqslant\gamma_1\geqslant\gamma_2\geqslant\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n=0,$$

$$\theta_n=\pm1,\quad \text{если } \gamma_n\neq\gamma_{n-1};\quad \theta_n=0,\quad \text{если } \gamma_n=\gamma_{n-1},$$

существует единственный нормированный элемент x такой, что

$$\gamma_n(x)=\gamma_n,\quad \theta_n(x)=\theta_n\quad(n=1,2,\ldots).$$

Доказательство предложения 1. Пусть X и Y — пространства, удовлетворяющие всем требованиям предложения 1. Пусть в каждом из них введены функционалы $\gamma_n(x)$, $\theta_n(x)$ и соответственно $\gamma_n(y)$, $\theta_n(y)$. Сопоставим каждому нормированному элементу $x\in X$ тот нормированный элемент $y=Tx\in Y$, для которого $\theta_n(y)\gamma_n(y)=\theta_n(x)\gamma_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$. Согласно лемме 2 это соответствие взаимно однозначно. Согласно лемме 1 оно взаимно непрерывно. Полученный гомеоморфизм распространяется на все пространство X: $Tx=\|x\|T(x/\|x\|)$, $T(\theta)=\theta$.

Остается показать, что в пространстве l_2 существует функционал $F(x)$ с требуемыми свойствами. Оказывается в этом случае достаточно положить $F(x)=1-\|x\|$ $(x\in l_2)$.

Теперь мы покажем, что каждое банахово пространство с базисом можно путем эквивалентной перенормировки подчинить условиям предложения 1.

Предложение 2. *В каждом сепарабельном банаховом пространстве X с базисом $\{e_k\}_1^\infty$ можно ввести норму ($\|\ \|$), эквивалентную исходной ($\|\ \|_0$), удовлетворяющую следующим требованиям:*

а) *Пространство $(X,\|\ \|)$ — локально равномерно выпукло (UR_L в обозначениях М. Дэя, (4), стр. 188);*

б) *Для любых нормированных элементов x_ν и x условие*

$$\lim_{\nu\to\infty}f_n(x_\nu)=f_n(x)\quad(n=1,2,\ldots)$$

влечет за собой сильную сходимость: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|x_\nu-x\|=0$.

в) *Относительно новой нормы базис $\{e_k\}$ ортогонален, т. е.*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1}a_ke_k\right\|<\left\|\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\right\|,\quad \text{если } a_n\neq0\quad(n=1,2,\ldots).$$

Норма, удовлетворяющая указанным требованиям, построена в (5, 6) (имеется в виду норма, определенная формулой (3) заметки (6)).

Предложение 3. *В банаховом пространстве, норма которого удовлетворяет условиям а), б), в) предложения 2, существует функционал $F(x)$, обладающий свойствами 1—4, сформулированными в предложении 1.*

Здесь нам потребуются еще две леммы. Рассмотрим функционал

$$\varepsilon(x,\delta)={}^1/_2\sup_{z\in G(x,\delta)}\|x-z\|\quad(\|x\|=1,\ 0\leqslant\delta\leqslant1),$$

где
$$G(x,\delta)=\{z:\|z\|\leqslant1;\ \min_{0\leqslant\lambda\leqslant1}\|\lambda x+(1-\lambda)z\|\geqslant1-\delta\}.$$

Если пространство локально равномерно выпукло, то

$$\lim_{\delta\to0}\varepsilon(x,\delta)=0. \tag{2}$$

Лемма 3. *Для любого пространства Банаха функционал $\varepsilon(x, \delta)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$\delta \leqslant \varepsilon(x, \delta) \leqslant 1, \quad \varepsilon(x, \delta) \leqslant {}^1/_2\|x - y\| + \varepsilon(y, \delta + \|x - y\|)$$

$$\varepsilon(x, \delta + h) - \varepsilon(x, \delta) \leqslant 3h / \delta^2 \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \delta + h \leqslant 1), \tag{3}$$

откуда, в частности, следует, что $\varepsilon(x, \delta)$ равномерно непрерывен на множестве $S \times [\delta_0; 1]$ при любом $\delta_0 > 0$ (S — единичная сфера пространства). Если пространство локально равномерно выпукло, то $\varepsilon(x, \delta)$ непрерывен на $S \times [0, 1]$.

Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(x) = \varepsilon\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) \quad (0 < \|x\| \leqslant 1);$$

при $x = \theta$ положим $\Phi(\theta) = 1$.

Лемма 4. *Функционал $\Phi(x)$ непрерывен при $\|x\| \leqslant 1$ и равномерно непрерывен при $\|x\| \leqslant 1 - \delta_0$ для любого $\delta_0 > 0$.*

Для каждого элемента $x(\|x\| \leqslant 1)$ определим множество

$$L(x) = \bigcup_n L_n(x),$$

где $L_n(x)$ — отрезок, соединяющий $S_{n-1}x$ и S_nx $(n = 1, 2, \ldots)$; $S_0x = \theta$. Определим, наконец, функционал

$$F(x) = (1 - {}^1/_2\|x\|) \inf_{z \in L(x)} \Phi(z) \quad (0 \leqslant \|x\| \leqslant 1). \tag{4}$$

Доказательство предложения 3. Нам нужно проверить, что функционал $F(x)$ обладает свойствами 1—4 предложения 1. Свойства 1 и 2 почти непосредственно следуют из определения $F(x)$ и леммы 4. Докажем свойство 3. Пусть выполнено (1). Для каждого S_n рассмотрим точку $\sigma_n \in L(S_n)$, на которой достигается нижняя грань в выражении (4):

$$\sigma_n = S_{m-1} + \alpha e_m \quad (m = m(n),\ 0 < |\alpha| \leqslant |a_m|,\ \alpha a_m > 0). \tag{5}$$

Согласно (2), (3) и (5) диаметр множества $G(\sigma_n / \|\sigma_n\|, 1 - \|\sigma_n\|)$ стремится к нулю с ростом n. Рассмотрим еще убывающую последовательность замкнутых множеств

$$Q(\sigma_n) = \{z\colon \|z\| \leqslant 1;\ f_k(z) = a_k\ (k = 1, 2, \ldots, m)\} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Опираясь на ортогональность базиса $\{e_k\}$, можно установить, что

$$G(\sigma_n / \|\sigma_n\|; 1 - \|\sigma_n\|) \supset Q(\sigma_n).$$

Таким образом, диаметр множества $Q(\sigma_n)$ стремится к нулю с ростом n. Единственный элемент x, лежащий в пересечении всех $Q(\sigma_n)$, и будет пределом последовательности S_n: $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$.

Докажем, наконец, свойство 4. Рассмотрим функцию $\psi(\alpha) = F(S_{n-1} + \alpha e_n)$. Пусть $|\alpha_1| < |\alpha_2|$, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \geqslant 0$. Тогда

$$\|S_{n-1} + \alpha_1 e_n\| < \|S_{n-1} + \alpha_2 e_n\| \tag{6}$$

в силу ортогональности базиса и

$$L(S_{n-1} + \alpha_1 e_n) \subset L(S_{n-1} + \alpha_2 e_n) \tag{7}$$

по определению множества $L(x)$. Из (4), (6) и (7) получаем, что $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$.

Теорема, сформулированная в начале заметки, есть прямое следствие предложений 1—3 и теоремы Бессаги — Пелчинского.

Выражаю глубокую благодарность В. И. Гурарию и А. Пелчинскому за ряд ценных советов.

Харьковский институт
инженеров коммунального хозяйства

Поступило
25 X 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Fréchet, Les éspaces abstraits, Paris, 1928. [2] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [3] C. Bessaga, A. Pélczyński, Bull. Acad. Polon., 8, 757 (1960). [4] М. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, М., 1961. [5] М. И. Кадец, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 6, 51 (1959). [6] М. И. Кадец, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 6, 186 (1961).