28 (24)

97

РЖМат 1966 1Б 444

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1965

том 162, № 6

Доклады Академии наук СССР
1965. Том 162, № 6

МАТЕМАТИКА

М. И. КАДЕЦ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КОНУСОВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 25 XII 1964)

Назовем, следуя М. Г. Крейну, конус K банахова пространства E нормальным, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых нормированных элементов x и y из конуса $\|x+y\| \geqslant \varepsilon$. Назовем конус усиленно острым, если его элементы подчинены условию

$$\|x+z\| \geqslant \|x\| + \eta(x, \|z\|) \qquad (x, z \in K; \quad \eta(x, \|z\|) > 0 \ \text{при} \ \|z\| > 0). \tag{1}$$

Теорема 1. *В сепарабельном банаховом пространстве E с нормальным конусом K можно ввести эквивалентную норму, относительно которой конус K будет усиленно острым.*

Доказательство непосредственно вытекает из следующих двух предложений.

Предложение 1. *В пространстве $C(S)$ функций, непрерывных на компакте S, можно ввести эквивалентную норму, относительно которой конус неотрицательных функций будет усиленно острым.*

Доказательство. Диаметр компакта S примем равным единице. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим конечное ε-покрытие, т. е. набор замкнутых множеств $S_i(\varepsilon) \subset S$ $(i = 1, 2, \ldots, n(\varepsilon))$ с диаметрами, не превосходящими ε, покрывающих S. Определим для каждого ε функционал

$$J(x, \varepsilon) = \frac{1}{n(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \max_{s \in S_i(\varepsilon)} |x(s)| \qquad (x(s) \in C(S);\ 0 < \varepsilon \leqslant 1) \tag{2}$$

и с его помощью определим искомую норму

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} J(x, 2^{-k}). \tag{3}$$

Легко видеть, что

$$\max_{s \in S} |x(s)| \leqslant \|x\| < 2 \max_{s \in S} |x(s)|.$$

Рассмотрим теперь неотрицательные функции $x(s)$ и $z(s)$; $\|x\| = 1$, $\|z\| = \delta$. Выберем $k_0 = k_0(x)$ настолько большим, чтобы колебание функции $x(s)$ на каждом из множеств $S_i(2^{-k_0})$ не превосходило $^1/_2\,\delta$. Тогда на том из множеств $S_i(2^{-k_0})$, где $z(s)$ достигает наибольшего значения,

$$\max\,[x(s) + z(s)] \geqslant \max x(s) + \delta/4$$

и поэтому, согласно (2),

$$J(x+z, 2^{-k_0}) \geqslant J(x, 2^{-k_0}) + \frac{1}{n(2^{-k_0})} \frac{\delta}{4}. \tag{4}$$

3 Зак. 2389, т. 162, № 6

Из (3) и (4) следует

$$\|x+z\| \geqslant \|x\| + \frac{2^{-k_0}}{n(2^{-k_0})}\frac{\delta}{4},$$

что и доказывает предложение 1.

П р е д л о ж е н и е 2. *Сепарабельное банахово пространство с нормальным конусом K можно изоморфно погрузить в пространство $C(S)$, причем K (и только он) отобразится в конус неотрицательных функций.*

Это предложение, обобщающее теорему Банаха — Мазура об универсальном пространстве, доказано М. Г. Крейном ([1]).

Определим теперь в сепарабельном банаховом пространстве E полную минимальную систему

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \quad (\|x_i\| = 1) \tag{5}$$

с тотальной сопряженной $\{f_i\}_1^\infty$. Рассмотрим наименьший замкнутый конус K, натянутый элементами системы (5). Допустим, что он усиленно острый.

Л е м м а 1. *Если* $x \in K$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n x = x \left(S_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k \right)$.

Доказательство опирается на монотонность нормы в K.

Рассмотрим множество D_0 тех элементов $x \in K$, у которых $\|x\| \leqslant 1$. Для каждого $y \in D_0$ определим множество

$$D(y) = \{z : z - y \in K,\ \|z\| \leqslant 1\}.$$

Л е м м а 2. *Если* $y_k \to y$ $(y_k \in D_0)$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(D(y_k), D(y)) = 0\ *.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследование случая $\|y\| < 1$ производится довольно просто без использования специальных свойств конуса K. Пусть $\|y\| = 1$. Так как конус K усиленно острый, то $D(y)$ содержит только точку y. Пусть z_k — произвольная точка множества $D(y_k)$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \| y - y_k + z_k \| \leqslant \lim_{k\to\infty} \| y - y_k \| + \lim_{k\to\infty} \| z \| = 1,$$

и, согласно условию (1), $\lim \|y_k - z_k\| = 0$, т. е. диаметр множества $D(y_k)$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как в это время сама точка y_k стремится к y, то расстояние между $D(y_k)$ и $D(y)$ стремится к нулю.

Определим для каждого нормированного элемента $x \in D_0$ последовательность чисел

$$\delta_n(x) = \frac{d\{D(S_n x)\}}{d\{D_0\}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{f_k(x)}{2^k \|f_k\|}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $d\{M\}$ — диаметр множества M. Из лемм 1—2 следует, что

$$1 \geqslant \delta_1(x) \geqslant \delta_2(x) \geqslant \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0.$$

Л е м м а 3. *Пусть последовательность чисел Δ_i подчинена условиям*

$$1 \geqslant \Delta_1 \geqslant \Delta_2 \geqslant \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0.$$

Тогда существует единственный нормированный элемент $x \in D_0$, для которого $\delta_n(x) = \Delta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

* $\rho(X, Y)$ — хаусдорфово расстояние между подмножествами метрического пространства.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнения

$$d\left\{D\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\right\}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{2^i\|f_i\|}\right)=d\{D_0\}\Delta_n \quad (n=1,2,\ldots). \tag{6}$$

При фиксированных значениях $\lambda_i \geqslant 0$ $(i < n)$ левая часть уравнения является строго убывающей функцией от $\lambda_n \geqslant 0$, обращающейся в нуль, когда $\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\|=1$, и принимающей значение $d\{D_0\}\Delta_{n-1}$ при $\lambda_n=0$. Из сказанного следует, что система (6) имеет единственное решение $\{\lambda_i\}_1^n$ $(\lambda_n \geqslant 0)$. Множества $D\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$ образуют убывающую последовательность, а их диаметры при $n\to\infty$ неограниченно убывают. Единственный элемент $x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i$, лежащий в их пересечении, и будет искомым элементом.

Теорема 2. *Нормальный конус K, натянутый векторами полной минимальной системы с тотальной сопряженной, гомеоморфен конусу $K(l_2)$, натянутому ортогональным базисом пространства l_2.*

Доказательство. Согласно теореме 1, можно, не ограничивая общности, считать, что K — усиленно острый. С помощью проведенных выше построений сопоставим взаимно однозначно каждому элементу $x\in K$ невозрастающую последовательность

$$\Delta_n=\delta_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|x\| \quad (n=0,1,2,\ldots;\ \Delta_0=\|x\|), \tag{7}$$

сходящуюся к нулю при $n\to\infty$. Полученное соответствие оказывается и взаимно непрерывным, если на множестве $\tilde{K}$ последовательностей (7) ввести топологию покоординатной сходимости. Покажем это. Пусть последовательность $y_\nu\in K$ сходится к y. Не ограничивая общности, можно считать $\|y_\nu\|=1$. Из сходимости y_ν к y следует, что $f_n(y_\nu)\to f_n(y)$ и $S_n y_\nu \to S_n y$ $(n=1,2,\ldots)$, откуда, по лемме 2,

$$\delta_n(y_\nu)\to\delta_n(y) \quad (n=1,2,\ldots). \tag{8}$$

С другой стороны, если выполнено (8), то, рассматривая (6) последовательно при $n=1,2,\ldots$, заключаем, что $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_n y_\nu=S_n y$ $(n=1,2,\ldots)$. Задавшись произвольным $\varepsilon>0$, возьмем n настолько большим, чтобы $d\{D(S_n y)\}<\varepsilon/2$. Выберем затем ν так, чтобы $\rho(D(S_n y);D(S_n y_n))<\varepsilon/2$, что можно сделать на основании леммы 2. Так как $y_\nu\in D(S_n y_\nu)$, а $y\in D(S_n y)$, то из предыдущих неравенств следует, что $\|y_\nu-y\|<\varepsilon$.

Таким образом, каждый конус K, удовлетворяющий условиям теоремы 2, гомеоморфен $\tilde{K}$. Так как конус $K(l_2)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то K гомеоморфен $K(l_2)$.

Теорема 3. *Пусть E — банахово пространство с безусловным базисом *. Тогда конус, натянутый элементами этого базиса, гомеоморфен $K(l_2)$.*

Доказательство, согласно теореме 2, следует из того, что конус, натянутый элементами безусловного базиса, нормален.

Теорема 4. *Каждое банахово пространство с безусловным базисом гомеоморфно l_2.*

Доказательство. Установим сначала топологическое соответствие между конусом K, натянутым элементами безусловного базис

---

* Определение и свойства безусловного базиса см. (3).

$\{x_k\}_1^\infty$ пространства E, и $K(l_2)$, натянутым ортогональным базисом $\{e_k\}_1^\infty$ пространства l_2. Пусть $x = \sum_1^\infty a_k x_k \in E$. Если элементу $x' = \sum |a_k| x_k \in K$ соответствует элемент $y' = \sum b_k e_k \in K(l_2)$, то элементу x мы поставим в соответствие элемент $y = \sum b_k \operatorname{sign} a_k \cdot e_k$. Это будет искомый гомеоморфизм.

Результат теоремы 4 другим путем был установлен Ч. Бессагой и А. Пелчинским ([2]); в их доказательстве используется частный случай теоремы 4 (гомеоморфизм пространств C и l), полученный автором ранее ([4]). Г. Корсон и В. Кли ([5]) установили гомеоморфизм между l_2 и $K(l_2)$; из этого результата и теорем 3 и 4 получается

Теорема 5. *Пространство E с безусловным базисом гомеоморфно своему конусу $K(E)$.*

Неизвестно, можно ли в теоремах 3—5 отказаться от требования безусловности базиса.

Поступило
16 XII 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, 28, № 1, 13 (1940). [2] Cz. Bessaga, A. Pełczinski, Bull. Acad. Polon., 8, № 11—12, 757 (1960). [3] М. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, М., 1961. [4] М. И. Кадец, ДАН, 92, № 3, 465 (1953). [5] H. Corson, V. Klee, Proc. Symp. Pure Math., 7, Convexity, Am. Math. Soc., 1963.