25 (22)

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1964

т. 155, № 6

Доклады Академии наук СССР
1964. Том 155, № 6

МАТЕМАТИКА

М. И. КАДЕЦ

ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ПАЛЕЯ — ВИНЕРА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 16 XII 1963)

Базис $\{e_k\}$ гильбертова пространства называется базисом Рисса, если для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ выполнено неравенство

$$A\left(\sum |a_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \|x\| \leqslant B\left(\sum |a_k|^2\right)^{1/2} \quad (0 < A \leqslant B < \infty).$$

Пусть $\lambda_k = k + \delta_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sup_k |\delta_k| = d < D. \tag{1}$$

Палей и Винер [1] показали, что если $D = 1/\pi^2$, то последовательность $\{e^{i\lambda_k t}\}_{-\infty}^{\infty}$, где λ_k подчинены условию (1), является базисом Рисса в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Даффин и Икес [2] (см. также [3]) установили, что этот результат верен при $D = \ln 2/\pi \approx 0{,}22$, а В. Д. Головин [4] довел значение D до 0,24. Согласно теореме Левинсона [5], при $D > 0{,}25$ утверждение перестает быть верным. В настоящей заметке мы покажем, что точной границей допустимых D является $D = 0{,}25$. Как и в работах [1-4], исходным пунктом наших рассуждений будет

Лемма Палея — Винера. *Если система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ близка к системе $\{e^{ikt}\}$ в том смысле, что*

$$\left\|\sum_k a_k e^{ikt} - \sum_k a_k e^{i\lambda_k t}\right\| \leqslant \theta \left\|\sum_k a_k e^{ikt}\right\| = \theta\left(\sum_k |a_k|^2\right)^{1/2}$$

для некоторого $\theta < 1$ и всех конечных наборов чисел a_k, то система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ — базис Рисса в $L_2(-\pi, \pi)$.

Теорема 1. *Если последовательность $\lambda_k = k + \delta_k$ подчинена условию*

$$\sup_k |\delta_k| = d < 0{,}25 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ — базис Рисса в $L_2(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Согласно лемме Палея — Винера вопрос сводится к исследованию верхней грани выражения

$$U = \left\|\sum_k a_k(1 - e^{i\delta_k t})e^{ikt}\right\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_k a_k(1 - e^{i\delta_k t})e^{ikt}\right|^2 dt\right\}^{1/2}, \tag{2}$$

взятой по всем конечным наборам чисел a_k таких, что $\sum_k |a_k|^2 \leqslant 1$. Если эта верхняя грань меньше единицы, то система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ — базис Рисса.

Разложим функцию $\psi(t) = 1 - e^{i\delta t}$ $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$ в ряд Фурье по ортогональной системе $\{1; \cos\nu t; \sin(\nu - 1/2)t\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$:

$$1 - e^{i\delta t} = \left(1 - \frac{\sin \pi\delta}{\pi\delta}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu 2\delta \sin \pi\delta}{\pi(\nu^2 - \delta^2)}\cos\nu t +$$

$$+ i\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu 2\delta\cos\pi\delta}{\pi[(\nu - 1/2)^2 - \delta^2]}\sin(\nu - 1/2)t. \tag{3}$$

Подставим (3) в (2) и изменим порядок суммирования:

$$U = \left\| \sum_k \left(1 - \frac{\sin \pi\delta_k}{\pi\delta_k}\right) a_k e^{ikt} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos \nu t \sum_k \frac{(-1)^{\nu} 2\delta_k \sin \pi\delta_k}{\pi (\nu^2 - \delta_k^2)} a_k e^{ikt} + \right.$$

$$\left. + i \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin (\nu - {}^1/_2)\, t \sum_k \frac{(-1)^{\nu} 2\delta_k \cos \pi\delta_k}{\pi [(\nu - {}^1/_2)^2 - \delta_k^2]} a_k e^{ikt} \right\|.$$

Применим неравенство треугольника:

$$U \leqslant \left\| \sum_k \left(1 - \frac{\sin \pi\delta_k}{\pi\delta_k}\right) a_k e^{ikt} \right\| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \cos \nu t \sum_k \frac{(-1)^{\nu} 2\delta_k \sin \pi\delta_k}{\pi (\nu^2 - \delta_k^2)} a_k e^{ikt} \right\| +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \sin (\nu - {}^1/_2)\, t \sum_k \frac{(-1)^{\nu} 2\delta_k \cos \pi\delta_k}{\pi [(\nu - {}^1/_2)^2 - \delta_k^2]} a_k e^{ikt} \right\|.$$

Оценим каждое слагаемое:

$$\left\| \sum_k \left(1 - \frac{\sin \pi\delta_k}{\pi\delta_k}\right) a_k e^{ikt} \right\| \leqslant \left(1 - \frac{\sin \pi d}{\pi d}\right) \left\| \sum_k a_k e^{ikt} \right\|,$$

$$\left\| \cos \nu t \sum_k \frac{(-1)^{\nu} 2\delta_k \sin \pi\delta_k}{\pi (\nu^2 - \delta_k^2)} a_k e^{ikt} \right\| \leqslant \frac{2d \sin \pi d}{\pi (\nu^2 - d^2)} \left\| \sum_k a_k e^{ikt} \right\|,$$

$$\left\| \sin (\nu - {}^1/_2)\, t \sum_k \frac{(-1)^{\nu} 2\delta_k \cos \pi\delta_k}{\pi [(\nu - {}^1/_2)^2 - \delta_k^2]} a_k e^{ikt} \right\| \leqslant \frac{2d \cos \pi d}{\pi [(\nu - {}^1/_2)^2 - d^2]} \left\| \sum_k a_k e^{ikt} \right\|.$$

Таким образом:

$$U \leqslant \left\{1 - \frac{\sin \pi d}{\pi d} + \sin \pi d \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2d}{\pi (\nu^2 - d^2)} + \cos \pi d \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2d}{\pi [(\nu - {}^1/_2)^2 - d^2]}\right\} \left\| \sum_k a_k e^{ikt} \right\| =$$

$$= \left\{1 - \frac{\sin \pi d}{\pi d} + \sin \pi d \left(\frac{1}{\pi d} - \operatorname{ctg} \pi d\right) + \cos \pi d \cdot \operatorname{tg} \pi d\right\} \left(\sum_k |a_k|^2\right)^{1/2} =$$

$$= (1 - \cos \pi d + \sin \pi d) \left(\sum_k |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

Итак, искомая верхняя грань выражения (2) при любом $d < 0{,}25$ строго меньше единицы, что и доказывает теорему.

Даффин и Шеффер ([6]) доказали следующее предложение:

Теорема Даффина — Шеффера. *Если система* $\{e^{i\lambda_k t}\}_{-\infty}^{\infty}$ — *базис Рисса в* $L_2(-\pi, \pi)$, *а действительные числа* μ_k *подчинены условию* $\sup\limits_k |\mu_k| < \infty$, *то система* $\{e^{(\mu_k + i\lambda_k)t}\}$ *также является базисом Рисса.*

Из этого предложения и теоремы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. *Если числа* z_k *таковы, что*

$$\sup_k |\operatorname{Im}(z_k - ik)| < 0{,}25; \quad \sup_k |\operatorname{Re} z_k| < \infty,$$

то система $\{e^{z_k t}\}_{-\infty}^{\infty}$ — *базис Рисса в* $L_2(-\pi, \pi)$.

Поступило
3 XII 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. E. A. C. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, N. Y., 1934. [2] R. J. Duffin, J. J. Eachus, Bull. Am. Math. Soc., **48**, 850 (1942). [3] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954. [4] В. Д. Головин, Докл. АН АрмССР, **36**, № 2, 65 (1963). [5] N. Levinson, Ann. Math., **37**, 919 (1936). [6] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, Trans. Am. Math. Soc., **72**, 341 (1952).