ДОПОВІДІ
АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНСЬКОЇ РСР

9

ОКРЕМИЙ ВІДБИТОК

1964

М. Й. КАДЕЦЬ

БАЗИСИ ТА ЇХ ПРОСТОРИ КОЕФІЦІЄНТІВ

(Представив академік АН УРСР О. В. Погорєлов)

Нехай в банаховому просторі E визначено повну мінімальну систему $X = \{x_i\}_1^\infty$ з тотальною спряженою системою $F = \{f_i\}_1^\infty (f_i(x_j) = \delta_{ij})$. Вважатимемо, що числова послідовність $\gamma = \{\gamma_i\}_1^\infty$ належить до мультиплікатора $M(x, X)$ елемента $x \in E$, якщо існує елемент $x_\gamma \in E$ такий, що

$$f_i(x_\gamma) = \gamma_i f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Визначимо мультиплікатор системи X:

$$M(X) = \bigcap_{x \in E} M(x, X).$$

Систему X називають базисом Шаудера (або просто базисом), якщо для кожного елемента $x \in E$ розклад

$$x \sim \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$$

збігається до елемента x. Систему X називають безумовним базисом, якщо він залишається шаудеровим базисом при кожній перестановці його членів. Систему X називають базисом Чезаро, якщо для кожного $x \in E$

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} S_m x \quad \left(S_m x = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, x_i\right).$$

Теорема 1. Якщо кожна незростаюча послідовність, що збігається до нуля, належить до $M(X)$, то X є базис Шаудера.

Д о в е д е н н я. Візьмемо довільний елемент $x \sim \Sigma f_i(x) x_i$ і розглянемо лінійний оператор T_x, що відображує кожний орт e_n банахового простору l на відповідну частинну суму розкладу елемента x:

$$T_x e_n = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i \in E \qquad (e_i \in l).$$

Згідно з умовою теореми, оператор T_x визначено на всіх елементах з l, що мають невід'ємні координати

$$T_x \eta = x_\gamma \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} \eta_i\Big) f_k(x)\, x_k \qquad (\eta = \{\eta_i\}_1^\infty \in l;\ \eta_i \geqslant 0). \tag{1}$$

Дійсно, саме в цьому випадку множники $\gamma_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \eta_i$ утворюють послідовність, що не зростає і прямує до нуля. Легко бачити, що співвідношення (1) однозначно поширюється на весь простір l. Доведемо, що оператор T_x неперервний, скориставшись для цього теоремою про замкнений графік [1]. Нехай $\eta^{(m)} \in l$ збіжна до $\bar{\eta} \in l$ послідовність і нехай відповідна послідовність

$$T_x \eta^{(m)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^m f_k(x)\, x_k \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

фундаментальна (тобто $T_x\eta^{(m)} - T_x\eta^{(n)} \to 0$ при $m,\ n \to \infty$). Оскільки E повний простір, то послідовність (2) збігається до якогось елемента $\bar{x} \in E$. З неперервності функціоналів f_k випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} f_k(T_x\eta^{(m)}) = f_k(\bar{x}) \qquad (k = 1,\ 2, \ldots),$$

тобто елементу $\bar{x}$ відповідає розклад

$$\bar{x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k(x)\, x_k \qquad (\gamma_k = \lim_{m\to\infty} \gamma_k^{(m)}). \tag{3}$$

З тотальності системи $\{f_k\}_1^\infty$ випливає, що $\bar{x} = T_k\bar{\eta}$. Таким чином, оператор T_x замкнений; крім того, він визначений на всьому просторі l. Значить, за теоремою про замкнений графік, T_x неперервний. З неперервності оператора T_x витікає, що множина елементів

$$S_n x = \sum_{k=1}^{x} f_k(x)\, x_k \qquad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

обмежена для кожного $x \in E$, бо належить до протиобласті одиничної кулі простору l. Згідно теореми Банаха—Штейнгауза [1] маємо, що

$$\|S_n x\| \leqslant C\|x\| \text{ для всіх } x \in E. \tag{4}$$

Тому, що система X повна, з (4) випливає [1], що для кожного $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \|x - S_n x\| = 0,$$

тобто, що X — базис Шаудера.

Теорема 2. Якщо кожна збіжна до нуля числова послідовність належить до $M(x)$, то система X — безумовний базис.

Доведення. Згідно з теоремою 1, система X — базис Шаудера. Оскільки ніяка перестановка членів системи X не впливає на умови теореми, то X — безумовний базис.

Теорема 3. Якщо кожна опукла послідовність, що збігається до нуля, належить до $M(X)$, то X — базис Чезаро.

Доведення. Візьмемо довільний елемент $x \sim \Sigma f_k(x) x_k$ і розглянемо лінійний оператор, що відображує орти простору l на відповідні чезарівські суми

$$U_x e_n = \sigma_n x = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} f_k(x)\, x_k.$$

Повторюючи майже без змін доведення теореми 1, переконуємось, що для кожного $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sigma_n x\| = 0.$$

Зауваження. 1. Застосований тут метод використовував В. Орліч в теорії ортогональних рядів [2]. 2. Обернені теореми також вірні. 3. Теореми 1—3 без значного ускладнення доведень можна перенести на F-простори.

Література

1. С. Банах, Курс функціонального аналізу, К., 1948, стор. 35, 68. 2. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958, стор. 268.

Надійшло до редакції
26.VIII 1963 р.

М. И. КАДЕЦ

БАЗИСЫ И ИХ ПРОСТРАНСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком АН УССР А. В. Погореловым)

Резюме

Установлены условия, которые надо наложить на мультипликатор полной минимальной системы с тотальной сопряженной, чтобы эта система была безусловным базисом, базисом Шаудера или базисом Чезаро. Мы говорим, что числовая последовательность $\gamma=\{\gamma_i\}_1^\infty$ принадлежит мультипликатору биортогональной системы $\{x_i, f_i\}_1^\infty$, если для каждого $x \in E$ найдется $x_\gamma \in E$ такой, что

$$f_i(x_\gamma) = \gamma_i f_i(x). \qquad (i=1,2, \ldots)$$

M. I. KADEC

BASES AND THEIR SPACES OF COEFFICIENTS

(Presented by A. V. Pogorelov, Member Academy of Sciences, Ukrainian SSR)

Summary

The conditions are established which should satisfy a multiplier of a complete minimal system with a total conjugate so that this system is an unconditional basis, Schauder basis or Cesaro basis. We say that the numerical sequence $\gamma=\{\gamma_i\}_1^\infty$ belongs to the multiplier of the biorthogonal system $\{x_i, f_i\}_1^\infty$ if for each $x \in E$ an element $x_\gamma \in E$ will be found such, that

$$f_i(x_\gamma) = \gamma_i f_i(x). \qquad (i = 1,2, \ldots)$$
