22

20

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

М. И. КАДЕЦ

Некоторые вопросы геометрии банаховых пространств

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1963

Одним из разделов теории банаховых пространств является исследование связи между особенностями строения единичной сферы и линейно-топологическими свойствами пространства. Первый пример такой связи — теорема о рефлективности равномерно выпуклого пространства [1]. В некотором смысле противоположный пример представляет собой требование строгой нормированности. Известно [2], что в каждом сепарабельном банаховом пространстве можно ввести эквивалентную норму, относительно которой оно станет строго нормированным.

Представляет интерес отыскание таких эквивалентных норм, которые, с одной стороны, налагали бы достаточно жесткие требования на строение единичной сферы, а с другой стороны, не слишком ограничивали бы линейно-топологическую природу рассматриваемого пространства. Нормы такого рода строятся в главе 1 и в § 1 главы II. Во второй и третьей главах построенные нормы используются как удобный метрический инструмент для установления различных предложений неметрического (линейно-топологического и даже топологического) характера. В четвертой главе проведено исследование подпространств пространства L_p.

ГЛАВА I. О связи между слабой и сильной сходимостью.

В. Л. Шмульяну принадлежит следующая теорема [3].

Если элементы x_n и x равномерно выпуклого пространства подчинены условиям

$$x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x \text{ и } \|x_n\| \to \|x\|,$$

то

$$\|x_n - x\| \to 0.$$

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; E^* — его сопряженное. Линейное подмножество $\Gamma \subset E^*$ назовем нормирующим, если

$$\inf_{x \in E} \sup_{f \in \Gamma} \frac{f(x)}{\|f\| \cdot \|x\|} = \eta > 0.$$

Каждое нормирующее множество тотально, то есть элемент, аннулируемый всеми функционалами этого множества, есть нуль пространства. Если пространство рефлективно, то верно и обратное. В § 1 изучаются свойства нормирующих множеств, необходимые для дальнейшего. Приведены примеры тотальных ненормирующих множеств линейных функционалов в пространствах c_0 и C. Основной результат этой главы получен в § 2.

ТЕОРЕМА 1·1. Пусть E — сепарабельное пространство Банаха; $\Gamma \subset E^*$ — нормирующее множество. Тогда в E можно ввести норму, эквивалентную исходной, и такую, что для любых элементов x_n и x условия

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \text{ для всех } f \in \Gamma \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

влекут за собой сильную сходимость последовательности x_n:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0;$$

если же выполнено только условие (1), то

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|.$$

Неизвестно, является ли необходимым требование, чтобы множество Γ было нормирующим. Открытым остается также вопрос о распространении этой теоремы на несепарабельные пространства.

В § 3 получены некоторые частные случаи теоремы 1·1, допускающие более эффективную конструкцию эквивалентной нормы. Так, для пространства непрерывных функций C эквивалентная норма, удовлетворяющая требованиям теоремы 1·1 относительно обычной слабой сходимости, имеет **вид:**

$$\|x\| = \max_{0<t\leqslant 1} |x(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \omega(x, {}^1/_k),$$

где $\omega(x, \delta)$ — модуль непрерывности функции $x(t)$:

$$\omega(x, \delta) = \max_{|t'-t''|<\delta} |x(t') - x(t'')|.$$

Рассмотрен случай пространства с базисом, когда в качестве множества Γ взята линейная оболочка множества, сопряженного базису. Этот результат допускает особенно простую формулировку в применении к пространству c числовых последовательностей $x = \{\xi_i\}_1^\infty$, сходящихся к нулю. Искомая эквивалентная норма в этом случае имеет вид

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \max_{i>k} |\xi_i|.$$

ГЛАВА II. Выпуклость в пространствах Банаха. Определим модуль выпуклости единичной сферы S банахова пространства:

$$\delta(x, \varepsilon) = 1 - \sup \left\| \frac{x+y}{2} \right\| (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2),$$

где x — произвольный элемент единичной сферы, а верхняя грань берется по всем $y \in S$, для которых $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$. Пространство называется локально равномерно выпуклым [4], если

$$\delta(x, \varepsilon) > 0 \text{ для всех } x \in S \text{ и } \varepsilon > 0.$$

Если же

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{x \in S} \delta(x, \varepsilon) > 0 \text{ для всех } \varepsilon > 0,$$

то пространство называется равномерно выпуклым [2], а функция $\delta(\varepsilon)$ — его модулем равномерной выпуклости. В § 1 доказана

ТЕОРЕМА 2·1. Каждое сепарабельное банахово пространство изоморфно некоторому локально равномерно выпуклому пространству.

Таким образом, локально равномерно выпуклые пространства в известном смысле ближе к строго нормированным, чем к равномерно выпуклым пространствам.

Доказательство теоремы 2·1 существенно использует теорему 1·1, и поэтому не может быть перенесено на несепарабельные пространства.

Второй параграф этой главы посвящен изучению безусловно сходящихся рядов. Ряд элементов банахова пространства называется безусловно сходящимся, если он сходится при любой перестановке его членов. В. Орлич [5] показал, что если ряд Σx_k элементов пространства L_p безусловно сходится, то

$$\sum \|x_k\|^2 < \infty \text{ при } 1 \leqslant p \leqslant 2; \sum \|x_k\|^p < \infty \text{ при } p > 2. \qquad (2)$$

При $p > 1$ пространство L_p равномерно выпукло, причем его модуль равномерной выпуклости допускает оценку

$$\delta(\varepsilon) > \gamma_p \varepsilon^2 \text{ при } 1 < p \leqslant 2; \ \delta(\varepsilon) > \gamma_p \varepsilon^p \text{ при } p > 2, \qquad (3)$$

где γ_p не зависит от ε [6], [7].

Сопоставляя (2) и (3), можно предположить, что теорема В. Орлича допускает каким-то образом обобщение на случай равномерно выпуклых пространств. Действительно, справедлива

ТЕОРЕМА 2·2. Если пространство равномерно выпукло с модулем выпуклости $\delta = \delta(\varepsilon)$ и ряд Σx_k безусловно сходится, то

$$\sum \delta(\|x_k\|) < \infty.$$

Как показывает пример пространства L, класс пространств, в которых из безусловной сходимости ряда следуют какие-то ограничения на ряд норм его членов, не исчерпываются ни равномерно выпуклыми, ни даже рефлективными пространствами. С другой стороны, существуют рефлективные пространства, не принадлежащие этому классу. Пример такого пространства также приведен в § 3.

В § 4 рассматривается частный случай задачи, поставленной М. Фреше [8] и С. Банахом [9]: гомеоморфны ли все сепарабельные банаховы пространства. Этой задаче посвящены работы [10—19], но окончательное ее решение до сих пор не получено.

ТЕОРЕМА 2·3. Все сепарабельные сопряженные банаховы пространства топологически эквивалентны.

Доказательство этой теоремы в основных чертах совпадает с полученным ранее доказательством топологической эквивалентности сепарабельных рефлективных пространств [15], отличаясь от него более глубоким использованием теоремы 1·1. Аналогичное доказательство теоремы 2·3 было получено несколько позже В. Кли [18]. Отметим еще очень сильный результат Ч. Бессаги и А. Пелчиньского [19]: если сепарабельное банахово пространство содержит подпространство, гомеоморфное l, или допускает проекцию на пространство, гомеоморфное l, то оно само гомеоморфно l.

В § 5 приведено доказательство необходимого критерия дифференцируемости нормы.

ТЕОРЕМА 2·4. Если норма банахова пространства дифференцируема по Фреше, то сопряженное пространство имеет ту же размерность (минимальную мощность всюду плотного множества), что и исходное.

Мы говорим, что норма банахова пространства дифференцируема по Фреше, если

$$\|x + ty\| = \|x\| + tf_x(y) + \omega(x, ty) \ (x, y \in E; \ f_x \in E^*),$$

где функционал $\omega(x, ty)$ подчинен условию

$$\lim_{t \to 0} \frac{\omega(x, ty)}{t} = 0$$

равномерно по всем нормированным y. Эта теорема показывает, что дифференцируемость нормы (которую можно интерпретировать как локально равномерную гладкость единичной сферы) есть более жесткое требование, чем локально равномерная выпуклость.

ГЛАВА III. Биортогональные системы и базисы. Множество элементов банахова пространства называется биортогональной системой, если для него существует сопряженная система линейных функционалов:

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}; \ x_i \in E; \ f_j \in E^*.$$

Каждому элементу пространства можно формально сопоставить ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) x_k, \qquad (4)$$

однако в общем случае этот ряд расходится. В связи с этим возникает задача о восстановлении элемента x по частным суммам

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k$$

его разложения (4). В § 1 рассматриваются биортогональные системы

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (5)$$

подчиненные единственному условию: линейная оболочка Г сопряженной системы $\{f_k\}$ является нормирующим множеством. Для таких систем строится нелинейный метод восстановления элемента по его разложению. Требование, чтобы Г было нормирующим множеством, обусловленно применением специальной нормы теоремы 1·1. С помощью этого метода доказываются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 3·1. Биортогональная система (5) может быть разбита на две подсистемы, каждая из которых есть базис со скобками в замыкании своей линейной оболочки.

Биортогональная система называется базисом со скобками, если существует последовательность индексов такая, что

$$x = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{n_j} f_k(x) x_k$$

для всех $x \in E$.

ТЕОРЕМА 3·2. Если разложение элемента по системе (5)

$$x \sim \sum a_k x_k \tag{6}$$

остается разложением некоторого элемента после любого изменения знаков членов ряда (6)

$$x(\alpha) \sim \sum \alpha_k a_k x_k \quad (\alpha_k = \pm 1),$$

то ряд (6) безусловно сходится к разлагаемому элементу.

ТЕОРЕМА 3·2 является обобщением одной теоремы В. Орлича [20] об ортогональных системах в пространствах L_p.

При изучении биортогональных систем с определенными ограничениями на их сопряженные естественно возникает вопрос, существуют ли такие системы. Ответ на этот вопрос дает

ТЕОРЕМА 3·3. Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства всех линейных комбинаций элементов $\{y_i\}_1^\infty$ и $\{\varphi_i\}_1^\infty$ соответственно (элементы y_i (соотв. φ_i) мы считаем линейно независимыми). Допустим далее, что для всех пар $y \in L_1$ и $\varphi \in L_2$ определена билинейная форма $\varphi(y)$ и что пространства взаимно тотальны; последнее означает, что если элемент $y \in L_1$ ($\varphi \in L_2$) аннулируется всеми φ_k (соотв. y_k), то он есть

нуль пространства. Тогда существует треугольное преобразование последовательности $\{y_k\}$:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} y_k$$

такое, что последовательность $\{x_n\}$ биортогональна, а линейная оболочка ее сопряженной системы совпадает с L_2.

Во втором параграфе этой главы введено понятие общего базиса и изучены некоторые его свойства. Биортогональная система $\{x_i\}_1^\infty$ называется общим базисом, если существует последовательность линейных операторов T_n, каждый из которых действует в линейной оболочке E_n элементов $\{x_i\}_1^n$ такая, что для всех $x \in E$.

$$x = \lim_{n \to \infty} T_n S_n x.$$

ТЕОРЕМА 3·4. Линейная оболочка системы, сопряженной общему базису, есть нормирующее множество.

ТЕОРЕМА 3·5. Если рефлективное пространство имеет общий базис, то каждая полная биортогональная система с тотальной сопряженной также будет общим базисом.

Отсюда, в частности, следует, что в сепарабельном гильбертовом пространстве каждая дважды полная биортогональная система есть общий базис. Операторы T_n в этом случае конструируются особенно просто.

ТЕОРЕМА 3·6. Пусть

$$x_1, x_2, x_3, \ldots; y_1, y_2, y_3, \ldots \ (x_i, y_j) = \delta_{ij}$$

дважды полная система. Обозначим P_n и Q_n операторы ортогонального проектирования на линейные оболочки элементов $\{x_i\}_1^n$ и $\{y_i\}_1^n$ соответственно. Тогда, если

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x, y_k) x_k,$$

то

$$x = \lim_{n \to \infty} P_n Q_n S_n x.$$

Так что $T_n = P_n Q_n$. Это предложение по существу получено С. С. Левиным [21].

ГЛАВА IV. О линейной размерности пространства. Вопрос о том, существует ли в пространстве L_p подпространство, изоморфное l_q, в настоящее время решен для всех возможных соотношений между P и q. Полученные результаты можно свести в следующую таблицу:

	Соотношение между p и q	Существует ли в L_p подпространство, изоморфное l_q
1	$p \geq 1$ $q=2$	да
2	$1<p=q$	да
3	$1 \leq q<p \leq 2$	нет
4	$2 \leq p<q$	нет
5	$1 \leq q<2<p$	нет
6	$2<q<p$	нет
7	$1 \leq p<2<q$	нет
8	$1 \leq p<q<2$	да

Случаи (1—4) рассмотрели С. Банах и С. Мазур [9]; (5—7) — Пэйли в незавершенной работе [22].

В § 1 изучаются подпространства пространства L_p при $p > 2$. Вводятся множества $M_p^\delta \subset L_p$: $x(t) \in M_p^\delta$, если

$$\operatorname{mes} \underset{t}{E} \{ |x(t)| \geq \delta \|x\| \} \geq \delta.$$

С помощью этих множеств формулируется основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4·1. Если бесконечномерное подпространство X пространства L_p принадлежит какому-нибудь M_p^δ, то оно изоморфно l_2. В противном случае оно содержит подпространство, изоморфное l_p.

Последнее утверждение теоремы справедливо и при $p < 2$.

В § 2 получен положительный ответ на вопрос таблицы в случае (8): построено функциональное пространство $E_q \subset F_p$, которое изоморфно l_q по норме любого L_p $(1 \leq p < q < 2)$. При этом существенно использовались некоторые понятия теории вероятностей.

В § 3 доказана

ТЕОРЕМА 4·3. Каждое нерефлективное подпространство простанства L содержит подпространство, изоморфное l.

Эта теорема представляет определенный интерес в связи с одним вопросом С. Банаха: должно ли каждое слабо полное, но не рефлективное банахово пространство содержать подпространство, изоморфное l?

Основные результаты диссертации докладывались на IV и V Всесоюзных конференциях по функциональному анализу, на IV Всесоюзном математическом съезде и опубликованы в работах [6], [15], [16], [23]—[28].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мильман Д. П. О некоторых признаках регулярности пространств типа В. ДАН СССР, т. 20, № 4, стр. 243—246, 1939 г.
2. Clarcson J. A. Uniformly convex spaces Trans. Amer. Math. Soc., v. 40, No. 3, pp. 396—414, 1936.
3. Шмульян В. Л. О некоторых геометрических свойствах сферы в пространствах типа В. ДАН СССР, т. 24, № 7, стр. 647—649, 1939 г.
4. Lovaglia A. Locally uniformly convex spaces Trans. Amer. Math. Soc., v. 78, No. 1, pp. 225—238, 1955.
5. Orlicz W. Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen Studia Math. B. 4, SS. 43—49, 1933.
6. Кадец М. И. Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве. УМН, т. 11, № 5, стр. 185—190, 1956 г.
7. Hanner O. On the uniform convexty of Lp and lp Ark. Math., v. 3, pp. 239—244, 1955.
8. Frechet M. Les Espaces Abstraits. Paris, 1928.
9. Банах С. Курс функционального анализа. Киев, 1948.
10. Mazur S. Une remarque sur l'homeomorphie des champs fonctionnels. Studia Math., v. 1, pp. 83—85, 1929.
11. Kaczmarz S. The homeomorphy of certain spaces Bull. Acad. Polon., No. 4—8, pp. 145—148, 1933.
12. Stone M. H. Notes on integration II Proc. Acad. Sci. USA., v. 34, pp. 447—455, 1948.
13. Кадец М. И. О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха. ДАН СССР, т. 92, № 3, стр. 465—468, 1953 г.
14. Кадец М. И. О топологической эквивалентности равномерно выпуклых пространств. УМН, т. 10, № 4, стр. 137—141, 1955 г.
15. Кадец М. И. О слабой и сильной сходимости. ДАН СССР, т. 122, № 1, стр. 13—16, 1958 г.
16. Кадец М. И. Про зв'язок між слабого та сильного збіжністю, ДАН УССР, № 9, стр. 949—952, 1958 р.
17. Кадец М. И. и Левин Б. Я. Решение задачи С. Банаха о топологической эквивалентности пространств непрерывных функций. Тр. сем. по функц. анализу, № 7, стр. 20—25, 1960 г.
18. Klee V. Mapping into normed spaces Fund. Math., v. 49, pp. 25—34, 1960.
19. Bessaga C., Pełczyński A. Some remarks on homeomorphism of banach spaces. Bull. Acad. Polon., v. 8, No. 11—12, pp. 757—761, 1960.
20. Orlicz W. Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen. Studia Math. B. 8, SS. 141—147, 1939.
21. Левин С. С. Intergralgleichungen in Funktionalräume Мат. Сб., т. 39 : 4, стр. 3—72, 1932 г.
22. Paley R. Some theorems on abstract spaces Bull. Am. Math. Soc., v. 42, No. 4, pp. 181—186, 1936.
23. Кадец М. И. О линейной размерности пространства Lp (p>2). НДВШ, № 6, стр. 104—108, 1958 г.

24. Кадец М. И. О линейной размерности пространств Lp и lq. УМН, т. 13, № 6, стр. 95—98, 1958 г.

25. Кадец М. И. О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым. Изв. вузов. Математика, № 6, стр. 51—57, 1959 г.

26. Кадец М. И. О биортогональных системах и базисах суммирования. Труды V Всесоюзной конференции по функциональному анализу. Баку, 1961 г, стр. 106—108.

27. Кадец М. И. Письмо в редакцию. Изв. вузов, № 6, стр. 139—187, 1961 г.

28. Kadec M. J., Pełczyński A. Bases, lacunare sequences and complemented subspaces in the spaces Lp. Studia Math., v. 21, pp. 161—176, 1962 г.

Л-57112 от 19.II 1963 г. Объем 0,75 п. л. Тираж 200 экз. Заказ 149

Типография Издательства МГУ (филиал). Москва, проспект Маркса, 20