21 (17) 18

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1962

Том 145, № 2

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 145, № 2

МАТЕМАТИКА

В. И. ГУРАРИЙ и М. И. КАДЕЦ

О МИНИМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ И КВАЗИДОПОЛНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 II 1962)

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, E^* — его сопряженное. Совокупность $\{x_i\}_1^\infty$ элементов пространства E называется минимальной, если каждый x_i не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных ее элементов. Совокупность линейных функционалов $\{f_i\}_1^\infty$ будем называть сопряженной к $\{x_i\}_1^\infty$, если

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (x_i \in E,\ f_i \in E^*;\ i,\ j = 1,\ 2, \ldots).$$

Каждая минимальная система имеет сопряженную. Множество $G \subset E^*$ называется тотальным относительно подпространства $E_1 \subset E$, если для любого элемента $x \in E_1$ из условия $g(x) = 0$ при всех $g \in G$ следует, что $x = \theta$. Условимся называть подпространство $E_1 \subset E$ нетривиальным, если и оно само и фактор-пространство E/E_1 по нему бесконечномерны; в дальнейшем рассматриваются только нетривиальные подпространства.

Теорема 1. *Пусть в подпространстве $E_1 \subset E$ определена полная минимальная система $\{x_i\}_1^\infty$, причем ее сопряженная $\{f_i\}_1^\infty$ $(f_i \in E^*)$ тотальна относительно E_1. Тогда систему $\{x_i\}_1^\infty$ можно расширить до минимальной системы, полной в E и имеющей тотальную (относительно E) сопряженную систему.*

Доказательство. В фактор-пространстве E/E_1 (как и во всяком сепарабельном банаховом пространстве ([1])) существует полная минимальная система $\{Y_i\}_1^\infty$ с тотальной сопряженной $\{\Phi_i\}_1^\infty$. Из каждого класса смежности Y_i выберем по одному элементу $y_i \in E$, а каждому линейному функционалу Φ_i сопоставим порожденный им линейный функционал φ_i, определенный в E:

$$\varphi_i(x) = \Phi_i(x + E_1) \quad (x \in E).$$

Легко убедиться в том, что множество $\{x_i\}_1^\infty \cup \{y_i\}_1^\infty$ полно в E, а множество $\{f_i\}_1^\infty \cup \{\varphi_i\}_1^\infty$ тотально. С помощью равенств

$$z_n = y_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ni} x_i; \qquad \psi_n = f_n + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ni} \varphi_i \quad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

где

$$\lambda_{ni} = -f_i(y_n); \quad \mu_{ni} = -f_n(y_i); \quad \lambda_{nn} + \mu_{nn} = 1 - f_n(y_n),$$

определим новые системы $\{z_i\}_1^\infty$ и $\{\psi_i\}_1^\infty$. Непосредственный подсчет показывает, что множество $\{x_i\}_1^\infty \cup \{z_i\}_1^\infty$ есть полная в E минимальная система с тотальной сопряженной $\{\psi_i\}_1^\infty \cup \{\varphi_i\}_1^\infty$.

Теорема 2. *Пусть $\{x_i\}_1^\infty \cup \{y_i\}_1^\infty$ — минимальная система в E, причем $\{x_i\}_1^\infty$ полна в подпространстве $P \subset E$. Образуем новую минимальную последовательность элементов*

$$u_i = \alpha_i x_i + y_{k_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots),$$

где α_i — произвольные числа, а $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ — какое-нибудь подмножество системы $\{y_i\}_1^{\infty}$. Замыкание линейной оболочки системы $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ обозначим R. Если сопряженная к $\{u_i\}_1^{\infty}$ система тотальна относительно R, то $R \cap P = \theta$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из замыкания линейной оболочки системы $\{x_i\}_1^{\infty} \cup \{y_i\}_1^{\infty}$:

$$x = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}y_i\right\}. \tag{1}$$

Так как эта система минимальна, то существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} a_{ni} = a_i(x); \quad \lim_{n\to\infty} b_{ni} = b_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Предположим теперь, что $x \in P \cap R$. Из того, что $x \in P$, следует $b_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, а из того, что $x \in R$, вытекает

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{ni}u_i = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_{ni}\alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} c_{ni}y_{ki}\right\}. \tag{3}$$

Сопоставляя (1), (2) и (3), мы видим, что

$$\lim_{n\to\infty} c_{ni} = b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots);$$

так как система $\{u_i\}_1^{\infty}$ обладает тотальной сопряженной, то из последнего равенства следует $x = \theta$.

Замечание 1. Система $\{u_i\}_1^{\infty}$ имеет тотальную сопряженную, например, в том случае, если этим свойством обладает система $\{x_i\}_1^{\infty} \cup \{y_i\}_1^{\infty}$.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 дополняют результаты В. Г. Винокурова ([2,3]) и обобщают некоторые из них.

Банаховы пространства E_1 и E_2 будем называть ε-изометричными, если существует изоморфизм T E_1 на E_2 такой, что для любого $x \in E_1$:

$$(1 - \varepsilon)\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|x\| \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Теорема 3. *Пусть $\{x_i\}_1^{\infty}$ — полная минимальная система в подпространстве $P \subset E$. Для данного $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность положительных чисел ε_i, что для любой последовательности $\{y_i\}_1^{\infty}$, $y_i \in E$, удовлетворяющей условию*

$$\|x_i - y_i\| < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

линейное отображение T, переводящее x_i в y_i $(i = 1, 2, \ldots)$, будет ε-изометрией подпространства P на замыкание линейной оболочки $\{y_i\}_1^{\infty}$.

Доказательство. Положим $\varepsilon_i = \varepsilon r_i/2^i$, где r_i — расстояние элемента x_i от линейной оболочки остальных элементов системы $\{x_i\}_1^{\infty}$. Определим на множестве линейных комбинаций элементов этой системы линейный оператор T, полагая

$$Tx_i = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Из неравенства

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\| \geqslant |\alpha_i|\, r_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

следует

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{\|x\|}{r_i}.$$

Оценим теперь $\|Tx\|$:

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y_i) \right\|;$$

так как

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x\|}{r_i} \cdot \frac{\varepsilon r_i}{2^i} \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

то

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|.$$

Продолжая по непрерывности оператор T на все P, получим требуемое ε-изометрическое отображение.

Пусть P и Q — подпространства в E, причем $P \cap Q = \theta$. Будем называть квазипрямой суммой P и Q и обозначать $P \hat{+} Q$ замыкание множества элементов вида $x + y$ $(x \in P,\ y \in Q)$. Если $P \hat{+} Q = E$, то каждое из подпространств P и Q называется квазидополнением к другому в E.

Теорема 4. *Если P и Q — нетривиальные подпространства в E и $P \supset Q$, то для любого $\varepsilon > 0$:*

1) *Существует подпространство $\widetilde{Q} \subset E$, ε-изометричное Q и квазидополнительное к P.*

2) *Существует подпространство $\widetilde{P} \subset E$, ε-изометричное P и квазидополнительное к Q.*

Доказательство. На основании теоремы 1 в E существует полная минимальная система $\{x_i\}_1^\infty \cup \{y_i\}_1^\infty \cup \{z_i\}_1^\infty$ с тотальной сопряженной относительно E такая, что $\{x_i\}_1^\infty$ есть полная система в Q, а $\{x_i\}_1^\infty \cup \cup \{y_i\}_1^\infty$ полна в P. По теореме 3 можно выбрать последовательность $\{\varepsilon_i\}_1^\infty$, $\varepsilon_i > 0$ так, чтобы замыкание $\widetilde{Q}$ линейной оболочки элементов $u_i = x_i + \varepsilon_i z_i$ было ε-изометрично Q. Так как система $\{u_i\}_1^\infty$ имеет, очевидно, тотальную (относительно $\widetilde{Q}$) сопряженную, то по теореме 2 $\widetilde{Q} \cap P = \theta$. Кроме того $P \dot{+} \widetilde{Q}$ содержит все элементы множества $\{x_i\}_1^\infty \cup \{y_i\}_1^\infty \cup \{z_i\}_1^\infty$, и поэтому $P \hat{+} \widetilde{Q} = E$, что и доказывает утверждение 1). Аналогично доказывается утверждение 2).

Доказанная теорема обобщает результат Макки ([4]) о существовании квазидополнения к любому подпространству в сепарабельном банаховом пространстве.

Следствие 1. Если P — нетривиальное подпространство в E, до для любого $\varepsilon > 0$ $E = P \hat{+} \widetilde{P}$, где $\widetilde{P}$ ε-изометрично P.

Так как в любом банаховом пространстве существует бесконечномерное подпространство с базисом, то из теоремы 4 непосредственно вытекает

Терема 5. *В сепарабельном банаховом пространстве любое бесконечномерное подпространство имеет квазидополнение с базисом.*

Следствие 2. Сепарабельное банахово пространство E можно представить в виде квазипрямой суммы его подпространств с базисами.

Харьковский автомобильно-дорожный институт
Харьковское высшее военно-авиационное училище

Поступило
23 II 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Маркушевич, ДАН, **41**, 241 (1943). [2] В. Г. Винокуров, ДАН, **81**, 337 (1951). [3] В. Г. Винокуров, ДАН, **85**, 685 (1952). [4] G. W. Mackey, Bull. Am. Math. Soc., **52**, 322 (1946).