ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1959 МАТЕМАТИКА № 6 (13)

М. И. Кадец

О ПРОСТРАНСТВАХ, ИЗОМОРФНЫХ ЛОКАЛЬНО РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛЫМ ПРОСТРАНСТВАМ

Пространство Банаха называется локально равномерно выпуклым, если для любых его элементов x и x_n из равенств

$$\|x\| = \|x_n\| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2 \tag{1}$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{2}$$

Локально равномерно выпуклые пространства, введенные Ловалья [1], являются обобщением равномерно выпуклых пространств [2]. Пространство Банаха называется равномерно выпуклым, если для любых его элементов x_n и y_n из равенств

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \quad \lim \|x_n + y_n\| = 2 \tag{1a}$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0. \tag{2a}$$

Каждое равномерно выпуклое пространство рефлективно [3]; с другой стороны, можно построить пример рефлективного сепарабельного пространства, не изоморфного никакому равномерно выпуклому пространству [4]. Таким образом, класс равномерно выпуклых пространств существенно у́же класса рефлективных пространств. Естественно возникает вопрос об объеме класса локально равномерно выпуклых пространств. В работе [1] приведены некоторые критерии изоморфизма произвольного пространства Банаха локально равномерно выпуклому пространству, из которых, в частности, следует, что нерефлективное пространство l изоморфно локально равномерно выпуклому пространству.

В настоящей статье мы покажем, что любое сепарабельное пространство Банаха изоморфно некоторому локально равномерно выпуклому пространству.

Пусть E — пространство Банаха с нормированным базисом

$$y_1, y_2, \ldots \tag{3}$$

Биортогональную базису (3) последовательность функционалов обозначим

$$f_1, f_2, \ldots \tag{4}$$

Таким образом, любой элемент $x \in E$ представляется рядом

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, y_k.$$

Будем обозначать

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_n(x)\,y_k;\quad R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\,y_k.$$

Предположим, что E нормировано таким образом, что для любого $x\in E$

$$\|x-S_k(x)\|\geqslant\|S_m(x)-S_k(x)\|\quad(m\geqslant k\geqslant 0).\tag{5}$$

Если $\|\ \|^{(0)}$ — любая норма пространства E, то норма, удовлетворяющая условию (5), может быть определена равенством

$$\|x\|=\sup_{m,\,n}\Big\|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\,y_k\Big\|^{(0)}.$$

Лемма. *Пусть $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность элементов, слабо сходящаяся к нулю относительно базиса* (3), *т. е. такая последовательность, для которой*

$$\lim_{n\to\infty} f_k(z_n)=0\quad(k=1,\ 2,\ \ldots);\tag{6}$$

тогда для любого k:

а) $$\varliminf_{n\to\infty}\{\|R_k(z_n)\|-\|z_n\|\}=0,$$

б) $$\varliminf_{n\to\infty}\|R_k(x+z_n)\|\geqslant\|R_k(x)\|$$

для любого $x\in E$.

Доказательство. Из (6) следует, что для любого k

$$\lim_{n\to\infty} S_k(z_n)=0,$$

откуда и вытекает равенство (a). Фиксируем теперь индекс k и элемент x и определим $m>k$ так, чтобы для произвольного $\varepsilon>0$

$$\|R_m(x)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\|R_k(x)\|.\tag{7}$$

Выберем теперь индекс n_0 так, чтобы для всех $n>n_0$ выполнялось неравенство

$$\|S_p(z_n)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\|R_k(x)\|\qquad(p\leqslant m),\tag{8}$$

что можно сделать на основании (6). Из (5) следует

$$\|R_k(x+z_n)\|\geqslant\|S_m(x+z_n)-S_k(x+z_n)\|.\tag{9}$$

Правую часть (9) перепишем в виде

$$\|S_m(x)-S_k(x)+R_m(x)-R_m(x)+S_m(z_n)-S_k(z_n)\|$$

и заменим ее не большей величиной

$$\|S_m(x)-S_k(x)+R_m(x)\|-\|R_m(x)\|-\|S_m(z_n)\|-\|S_k(z_n)\|.$$

Из (7), (8) и (9):

$$\|R_k(x+z_n)\|\geqslant\|S_m(x)-S_k(x)+R_m(x)\|-\varepsilon\|R_k(x)\|=(1-\varepsilon)\|R_k(x)\|,$$

что и доказывает (б).

Введем в E новую норму, эквивалентную прежней:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|R_k(x)\|.$$

Для этой нормы справедлива

Теорема 1. *Если для последовательности* $\{x_n\}_1^\infty$ *и элемента* x *выполняются условия:*

$$\lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = f_k(x) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots); \qquad \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1 = \|x\|_1, \tag{11}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что существует последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, удовлетворяющая (11), для которой

$$\|x_n - x\|_1 \geqslant \varepsilon > 0. \tag{13}$$

Разность $x_n - x$ обозначим z_n, так что $x_n = x + z_n$. Определим индекс $q = q(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\|R_k(x)\| < \frac{\varepsilon}{16} \text{ для } k > q. \tag{14}$$

Выберем n так, чтобы удовлетворить условиям:

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|R_k(z_n)\| > \frac{\varepsilon}{2^{q+2}}, \tag{15}$$

что можно сделать на основании утверждения (а) доказанной выше леммы, и

$$\|R_k(x+z_n)\| > \|R_k(x)\| - \frac{\varepsilon}{2^{q+5}} \text{ для } k \leqslant q. \tag{16}$$

Ряд, представляющий $\|x+z_n\|_1$, разобьем на два:

$$\|x+z_n\|_1 = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^k} \|R_k(x+z_n)\| + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|R_k(x+z_n)\|.$$

Оценим снизу каждую из полученных сумм:

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^k} \|R_k(x+z_n)\| > \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^k} \left[\|R_k(x)\| - \frac{\varepsilon}{2^{q+5}} \right] > \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^k} \|R_k(x)\| - \frac{\varepsilon}{2^{q+4}} >$$

$$> \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|R_k(x)\| - \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{16} - \frac{\varepsilon}{2^{q+4}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|R_k(x)\| - \frac{\varepsilon}{2^{q+3}}. \tag{17}$$

В этой оценке мы воспользовались неравенствами (14) и (16).

Вторую сумму оценим с помощью неравенств (14) и (15):

$$\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|R_k(x+z_n)\|\geqslant\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|R_k(z_n)\|-\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|R_k(x)\|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon}{2^{q+2}}-\frac{\varepsilon}{2^{q+4}}=\frac{3\varepsilon}{2^{q+4}}. \tag{18}$$

Сложив (17) и (18), получим

$$\|x+z_n\|_1>\|x\|_1+\frac{\varepsilon}{2^{q+4}},$$

что противоречит второму равенству в (11). Теорема 1 доказана.

Возьмем в качестве пространства E пространство C всех непрерывных функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 2. *Пространство C изоморфно локально равномерно выпуклому пространству.*

Доказательство. Рассмотрим выпуклый однородный функционал

$$I(x)=\sup\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_{\nu_k}(x)|^2}, \tag{19}$$

где верхняя грань берется по всем перестановкам последовательности $\{f_k(x)\}_1^{\infty}$. Очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\max_k|f_k(x)|\leqslant I(x)<\max_k|f_k(x)|\leqslant A\|x\|_1, \tag{20}$$

где коэффициент $A>0$ зависит только от выбора нормы. С помощью функционала $I(x)$ введем в C новую норму

$$\|x\|_2=\sqrt{\|x\|_1^2+I^2(x)} \tag{21}$$

и покажем, что нормированное таким образом C превращается в локально равномерно выпуклое пространство.

Пусть x и x_n — элементы, удовлетворяющие (1):

$$\|x\|_2=\|x_n\|_2=1, \quad \lim_{n\to\infty}\|x+x_n\|=2. \tag{22}$$

Пусть далее

$$f_1^{(n)},\ f_2^{(n)},\ \ldots \tag{23}$$

— множество (4), члены которого представлены так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x+x_n)|^2>I^2(x+x_n)-\frac{1}{n}. \tag{24}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x+x_n)|^2=2\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x)|^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x)|^2\Big\}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x-x_n)|^2,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x+x_n)|^2\leqslant 2[l^2(x)+l^2(x_n)]-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x-x_n)|^2,$$

или, принимая во внимание (24),

$$l^2(x+x_n)\leqslant 2[l^2(x)+l^2(x_n)]-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x-x_n)|^2+\frac{1}{n}. \tag{25}$$

Сложив (25) с очевидным неравенством

$$\|x+x_n\|_1^2\leqslant 2[\|x\|_1^2+\|x_n\|_1^2],$$

получим

$$\|x+x_n\|_2^2\leqslant 2[\|x\|_2^2+\|x_n\|_2^2]-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x-x_n)|^2+\frac{1}{n}.$$

Так как x и x_n удовлетворяют (22), то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|f_k^{(n)}(x-x_n)|^2=0. \tag{26}$$

Поскольку

$$2[\|x\|_2^2+\|x_n\|_2^2]-\|x+x_n\|_2^2=\{2[l^2(x)+l^2(x_n)]-l^2(x+x_n)\}+$$
$$+\{2[\|x\|_1^2+\|x_n\|_1^2]-\|x+x_n\|_1^2\}$$

и выражения в фигурных скобках неотрицательны, то

$$\lim_{n\to\infty}\{2[l^2(x)+l^2(x_n)]-l^2(x+x_n)\}=0. \tag{27}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}f_k(x_n)=f_k(x)\quad(k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{28}$$

Доказательство проведем от противного. Допустим, что для какого-то $k=k_0$

$$|f_{k_0}(x_n-x)|\geqslant\varepsilon>0, \tag{29}$$

для некоторой бесконечной последовательности индексов n.

Тогда (26) может выполняться лишь в том случае, если номер f_{k_0} в последовательности (23) неограничено возрастает с ростом n [1)], для чего в свою очередь необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_0}(x+x_n)=0. \tag{30}$$

Определим элементы x' и x'_n равенствами:

$$x'=x-f_{k_0}(x)y_{k_0};\quad x'_n=x_n+f_{k_0}(x)y_k. \tag{31}$$

Значения функционала I для этих элементов удовлетворяют таким соотношениям:

$$I(x'+x'_n)=I(x+x_n);\qquad I^2(x')=I^2(x)-\eta;\qquad I(x'_n)<I(x), \tag{32}$$

где $\eta>0$ — слагаемое, которое выпадает в (19) при переходе от x к x'; последнее неравенство в (32) справедливо для достаточно больших n. Из очевидного неравенства

$$I^2(x'+x'_n)\leqslant 2[I^2(x')+I^2(x'_n)]$$

и соотношений (32) получаем

$$I^2(x+x_n)<2[I^2(x)+I^2(x_n)]-\eta,$$

что противоречит (27). Таким образом, (28) доказано.

Из определения нормы $\|\ \|_1$ и соотношения (б) леммы следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1\geqslant\|x\|_1.$$

Заметим, что последовательность $\{f_k(x_n)\}_{k=1}^{\infty}$, порожденную элементом x_n, можно рассматривать как элемент пространства сходящихся к нулю числовых последовательностей с нормой $I(x_n)$, которая, согласно (20), эквивалентна обычной норме пространства c_0. Из (28) следует, что x_n при $n\to\infty$ слабо сходится к x в смысле c_0.

Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} I(x_n)\geqslant I(x).$$

Так как, согласно (21) и (22),

$$\|x_n\|_1^2+I^2(x_n)=\|x\|_1^2+I^2(x),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1=\|x\|_1. \tag{33}$$

Так как норма $\|\ \|_1$ удовлетворяет условиям (11) и (12) теоремы 1, то из (28) и (33) следует сходимость последовательности x_n к x:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_1=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_2=0. \tag{34}$$

Сопоставляя (22) и (34), мы видим, что пространство непрерывных функций с нормой $\|\ \|_2$ локально равномерно выпукло.

[1)] В этом абзаце мы рассматриваем только те n, которые удовлетворяют допущению (29).

Поскольку всякое сепарабельное пространство Банаха эквивалентно подпространству пространства C, то из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Всякое сепарабельное пространство Банаха изоморфно некоторому локально равномерно выпуклому пространству.*

Харьковский автомобильно-дорожный институт

Поступило
23 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. A. R. Lovaglia. Locally uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc., v. 78, № 1, pp. 225—238, 1955.

2. I. A. Clarcson. Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Matt. Soc., v. 40, № 3, pp. 396—414, 1936.

3. Д. П. Мильман. О некоторых признаках регулярности пространств типа B. ДАН СССР, т. 20, № 4, стр. 243—246, 1936.

4. M. M. Day. Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. Bull. Amer. Math. Soc., v. 47, pp. 313—317, 1941.