1954 г. январь—февраль т. IX, вып. 1 (59)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОБ УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p

М. И. Кадец

Настоящая заметка является попыткой обобщения известной теоремы Штейница [1] об области сумм условно сходящегося ряда в n-мерном пространстве на случай пространства L^p при определённых ограничениях, наложенных на члены ряда.

Теорема I. *Дано N векторов r_j из пространства L^p, сумма которых равна нулю.*

Возможно так упорядочить это множество, что

$$\max_{\nu} \left\| \sum_{1}^{\nu} r_j \right\| < B_p \left\{ \sum_{1}^{N} \| r_j \|^2 \right\}^{1/2} \quad \text{при} \quad p > 2, \tag{1а}$$

или

$$\max_{\nu} \left\| \sum_{1}^{\nu} r_j \right\| < B_p \left\{ \sum_{1}^{N} \| r_j \|^p \right\}^{1/p} \quad \text{при} \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{1б}$$

где B_p — постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Требуемое упорядочение получим следующим образом: первый вектор выбираем произвольно; когда первые k векторов уже выбраны, выбираем вектор r_{k+1} так, чтобы

$$\int_0^1 | r_1 + r_2 + \ldots + r_k |^{p-1} r_{k+1} \operatorname{sign} (r_1 + r_2 + \ldots + r_k)\, dx \leqslant 0. \tag{2}$$

Этот процесс продолжаем, пока не исчерпаем всё множество. (Требование (2) всегда выполнимо, так как сумма всех векторов равна нулю.)

Покажем, что для упорядоченного таким способом множества выполняются неравенства (1а) или (1б). Рассмотрим сначала случай, когда $p > 2$. Воспользуемся следующим неравенством:

$$| a + b |^p \leqslant | a |^p + p\, | a |^{p-1} b \operatorname{sign} a + A \left(| b |^p + | a |^{p-2} | b |^2 \right), \tag{3а}$$

где a и b — произвольные действительные числа, а $A > 1$ — постоянная, зависящая только от p.

Неравенство (3а) для

$$a = r_1 + r_2 + \ldots + r_k = S_k; \qquad b = r_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

после интегрирования по x даёт:

$$\int_0^1 |S_k|^p dx \leqslant \int_0^1 |S_{k-1}|^p dx + p\int_0^1 |S_{k-1}|^{p-1} r_k \operatorname{sign} S_{k-1} dx +$$
$$+ A\left[\int_0^1 |r_k|^p dx + \int_0^1 |S_{k-1}|^{p-2} |r_k|^2 dx\right]. \qquad (3')$$

Согласно неравенству (2)

$$p\int_0^1 |S_{k-1}|^{p-1} r_k \operatorname{sign} S_{k-1} dx \leqslant 0.$$

К последнему слагаемому неравенства (3′) применим неравенство Гельдера:

$$\int_0^1 |S_{k-1}|^{p-2} |r_k|^2 dx \leqslant \left\{\int_0^1 |S_{k-1}|^p dx\right\}^{\frac{p-2}{p}} \left\{\int_0^1 |r_k|^p dx\right\}^{\frac{2}{p}}.$$

Окончательно получим:

$$\| S_k \|^p \leqslant \| S_{k-1} \|^p + A\,[\| r_k \|^p + \| S_{k-1} \|^{p-2} \| r_k \|^2]. \qquad (4а)$$

Обозначим:

$$\frac{S_k}{\sqrt{2A\sum\limits_{k=1}^{N} \| r_k \|^2}} = \sigma_k; \qquad \frac{r_k}{\sqrt{2A\sum\limits_{k=1}^{N} \| r_k \|^2}} = \rho_k; \qquad \max \| \sigma_k \| = \| \sigma_{N_0} \| = \mu.$$

В новых обозначениях (4а) примет вид

$$\| \sigma_k \|^p \leqslant \| \sigma_{k-1} \|^p + A\,[\| \rho_k \|^p + \| \sigma_{k-1} \|^{p-2} \| \rho_k \|^2].$$

Так как

$$\| \rho_k \|^p < \| \rho_k \|^2 < 1; \qquad \| \sigma_k \|^{p-2} < 1 + \mu^p,$$

то последнее неравенство можно заменить следующим:

$$\| \sigma_k \|^p < \| \sigma_{k-1} \|^p + A\,(2 + \mu^p) \| \rho_k \|^2.$$

Просуммировав это неравенство по k от 1 до N_0, получим:

$$\mu^p < A\,(2 + \mu^p) \sum_1^{N_0} \| \rho_k \|^2 < A\,(2 + \mu^p) \sum_1^{N} \| \rho_k \|^2 = 1 + \frac{\mu^p}{2},$$

откуда $\mu^p < 2$ и

$$\max_k \| S_k \|^p < 2\left\{\sqrt{2A\sum_1^N \| r_k \|^2}\right\},$$

что и доказывает неравенство (1а).

Для случая $1 < p \leqslant 2$ применим неравенство

$$|a + b|^p \leqslant |a|^p + p\,|a|^{p-1} b \operatorname{sign} a + A\,|b|^p, \qquad (3б)$$

из которого аналогичным способом получим:

$$\| S_k \|^p \leqslant \| S_{k-1} \|^p + A\,\| r_k \|^p, \qquad (4б)$$

откуда

$$\| S_k \|^p \leqslant A \sum_1^k \| r_\nu \|^p$$

и, следовательно,

$$\max_k \| S_k \|^p \leqslant A \sum_1^N \| r_k \|^p.$$

Теорема доказана.

Пусть члены ряда векторов в L^p удовлетворяют одному из двух условий:

$$\sum_1^\infty \| r_k \|^2 < \infty \quad \text{при} \quad p > 2 \tag{5а}$$

или

$$\sum_1^\infty \| r_k \|^p < \infty \quad \text{при} \quad 1 < p \leqslant 2. \tag{5б}$$

Для таких рядов справедливы следующие предложения.

Лемма I. *Если какой-то вектор пространства L^p является предельным для последовательности усечённых сумм ряда векторов, удовлетворяющего условиям* (5а) *или* (5б), *то соответствующей перестановкой членов можно сделать ряд сходящимся к этому вектору (т. е. этот вектор принадлежит области сумм).*

Лемма II. *Область сумм ряда векторов, удовлетворяющего условиям* (5а) *или* (5б), *есть замкнутое множество.*

Лемма III. *Если векторы $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ принадлежат области сумм ряда векторов, удовлетворяющего условиям* (5а) *или* (5б), *то и вся прямая*

$$S^{(\lambda)} = \lambda S^{(1)} + (1 - \lambda) S^{(0)}$$

принадлежит области сумм.

Доказательство этих лемм почти дословно совпадает с доказательством аналогичных лемм в [2]. В случае конечномерных пространств лемма (II), очевидно, есть следствие леммы (III). Из лемм II и III следует

Теорема II. *Область сумм условно сходящегося ряда векторов в L^p есть подпространство, если только члены ряда удовлетворяют условиям* (5а) *или* (5б).

Автору неизвестно, насколько условия (5) являются необходимыми.

Поступило в редакцию 18 августа 1953 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. f. d. reine und angew. Math. **143** (1914—1916), 144.

[2] М. И. Кадец, Об одном свойстве векторных ломаных в n-мерном пространстве, УМН **VIII**, вып. 1 (1953), 139—143.